# 微分形式の理論

## およびその物理科学への応用

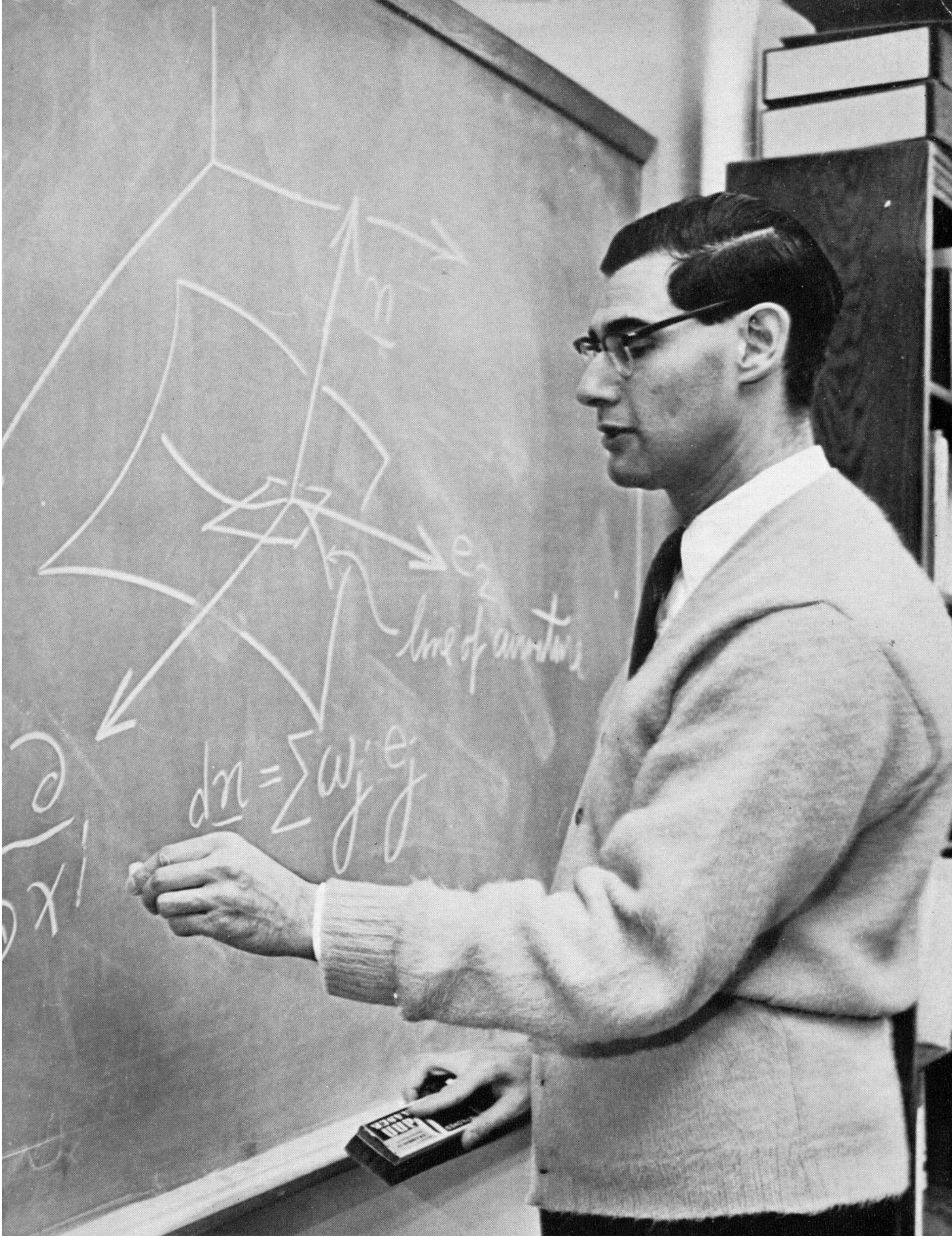
H.フランダース著
岩 堀 長 慶訳

岩 波 書 店

DIFFERENTIAL FORMS
with Applications to the Physical Sciences
by
Harley Flanders
1963

Original English edition published by
Academic Press Inc., New York

This book is published in Japan by arrangement
with Academic Press Inc., New York through
John Weatherhill, Inc., Tokyo.




著者 H.フランダース

June に

# 序　文

工学の問題を解くに際し，テンソルがよいか微分形式がよいかについて，何回も賛否の議論を仲好くくり返した後で，私は同僚の Flanders 博士を説得して，微分形式に関する一連の講義を準備して頂くことにした．その結果，パーデュー(Purdue)大学工学部のいくつかの教室のメンバーで興味を抱いた一群の人々に対して，すぐれた一連の講義がなされたのであった．

講義に出席した者にとっては，微分形式の利用が，工学体系の分析と綜合に対するもう一つの道具の獲得になることが明らかになったのである．テンソルだけを使って解決するのでは普通では大変困難であるが，微分形式によって，結果が極めて迅速にしかも直接的に得られるような，或る種の問題が存在するのである．

著者は，彼のノートを出版に必要な程度に正式のものにして，この重要な主題を他の人々も学び得るようにするよう皆から勧められたのであった．近代数学から発した微分形式および関連トピックは，工学者および科学者の利用手段として，新しくしかも強力な解析的道具であるから，本書を私は高く推薦するものである．

1962年11月20日

パーデュー大学，工学・数理科学教室
George A. Hawkins 学部長

# まえがき

1962年春著者は，外微分形式に関する一連の講義を，パーデュー大学工学部の教室員および大学院学生に対して行なった．講義した材料をさらに広げて述べたものが本書である．本書の主目的とする所は，近代数学における非常に偉大な力をもった新しい道具を，工学者や物理学者のお役に立てようと願っているのである．本書に述べた応用はどれも余り深いものではないが，しかしどの場合にも，この機構の有用性を示すに足る程に，基礎が十分にカバーされていることを願っている．

順序として本書の組織について一言しよう．第I章は紹介の部分であって，どこを目指してわれわれが進んで行こうとしているのか，そしてそれは何故にかということを略述する．第II, III, V章は理論的材料の全部を含んでいる．これを知識とすることによって，応用への扉が開かれるのである．恐らく初めて読むときには，証明の細部をほじくるよりは，むしろ主題に対するある直観を発展させ，定義される種々様々な事柄が一体どのようなものなのかについて，しっかりした考えをもつことを狙いとすべきであろう．微分幾何学の問題への応用(物理科学においてかなり利用される多くのトピックを含む)は大体第IV, VI, VIII, IX章にある．常および偏微分方程式の種々のトピックへの応用は第VII章に見出されるであろう．最後に，物理学におけるいくつかのトピックへの応用は3.4節，4.6節，6.4節および第X章にある．

読者に対して予想することは，まず第一に，詳しい方向はとも角として，或る程度の科学的成熟である．本書の内容は実のところ高級な数学ではないのであるが，さりとて全くの初級の数学というわけでもない．そして実変数の多変数函数の微積分に関する或る程度の知識が必要である．また1次結合，基底，次元，1次変換等の概念にわたって，線型代数を使いこなせる知識も必要であ

る．近代数学の基本的ルールの最少量——集合，直積，集合上の函数等——の陳列は役には立つが本質的ではない．普通この材料はとも角だんだん滲透するやり方でとり上げられる．そして本書の最後にある記号小辞典は役立つに相異ない．読者はまた常微分方程式の解の存在について知らねばならない．テンソルの手法についてすこし慣れていれば助けにはなるが，しかし本質的ではない．

もしも本書の読者が数学者ばかりならば，定義の定式化や定理の証明についてもっと気を配り，そして本書では軽く触れただけの多くの技術的な点についても，もっとかなりの所まで突込んで論じた方がよかったことであろう．しかしながら，われわれの目標は，この主題について，できるだけ手取早く，直観と使いこなせる知識とを展開することなのである．このことは恐らくもっと少ない頁数でなし得たであろう——もしも，理論物理学のすぐれた論文達の中に見出されるものと釣合うように，厳密度に固執しなければ，それでも，近代抽象数学において習慣であり，その性質から生れつきの固有性であるあの極端に大きな精確性には達していないのである．他の資料に応用するために数学の最近の発展を研究している人は(それは全く正しいことである)，この精確性をかなりの妨害物であまりにもペダンティックなものと思うに相異ない——でなければ徹底的に退屈することだろう．これこそ近代数学と近代科学の間の大きな仲たがいの真の原因である．数学者にとって彼の生業を科学に役立たせるようにすることは軽い仕事ではないのであって，それについて本書の寄与する度合は，もしうまく行っても必然的に最も素朴な成功でしかあり得ないのである．

このようなもろもろの事情があるけれども，それでもわれわれは本書の材料を数学科の大学院学生に，現代微分幾何学への入門として推薦することを躊躇はしない．実際のところ，鍛練を積んだ進んだ学部学生ならば，本書を全く近づき易いものと思うに違いないのである．抽象から抽象へ移るに忙しい今日の数学的訓練の程度を考えれば，本書中の或る事項は，着実にやっている数学科学生にとってさえも，少しは“眼を見張るようなこと”になるかも知れない．例えば，そのような学生が，本書で生れて初めて，放物型偏微分方程式，或いは行列群，或いは接触変換なるものに出会うというようなことも考えられるの

である.

私が恩師・同僚・学生諸氏から受けた絶えざる実質的援助と激励とを感謝するのは，私の喜ばしい義務である. これについて特に感謝の一票を捧げたいのは，パーデュー大学の工学及び数理科学学部長の George A. Hawkins 氏である. 最後に Elizabeth Young 嬢に感謝の意を表したい. その美しい原稿タイピングは実質的な貢献であった.

1963年7月

Harley Flanders

# 目　　次

# 第I章 紹　　介

## 1.1 外微分形式

われわれがこれから学ぼうとしている対象は，**外微分形式**(exterior differential forms)と呼ばれているものである．これらは積分記号の内部に生ずる所の‘或る物’である．例えば，線積分

$$\int A\,dx+B\,dy+C\,dz$$

から，1次微分形式

$$\omega = A\,dx+B\,dy+C\,dz$$

が得られ，面積分

$$\iint P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy$$

から，2次微分形式

$$\alpha = P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy$$

が得られ，そして立体積分

$$\iiint H\,dxdydz$$

からは，3次微分形式

$$\lambda = H\,dxdydz$$

が得られる．

これらはすべて，3変数の空間 $\mathsf{E}^3$ の中に生息している微分形式ので例ある．もし $n$ 次元空間の中で作業をすれば，$r$ 重積分(すなわち，$r$ 次元多様体上の積分)の積分記号下の量は，‘$n$ 変数の $r$ 次微分形式’なのである†.

上記の $\alpha$ の式において，$dzdy, dxdz, dydx$ に関する項がいないことに注意

† (訳註) $r$ 次外微分形式が正式の名称であるが，$r$ 次微分形式あるいは $r$-形式と略称されることが多い．

しよう．これは対称性ないし歪対称性を暗示している．更に項 $dxdx, \cdots$ がいないことは，歪対称性の方を特に強く暗示している．

以下われわれは，或る内的な統一性を持った，微分形式の微積分学を展開しよう．それに含まれている一つとして，重積分における変数変換の公式がある．われわれが考える積分はつねに‘向きのついた’(oriented) 積分である．従って，われわれは函数行列式 (Jacobian) の絶対値をとることは‘決してない’のである．

次の積分

$$\iint A(x, y)\, dxdy$$

において，変数変換

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

を行なうことを考えよう．まず次式が得られる．

$$\iint A(x, y)\, dxdy = \iint A[x(u, v),\ y(u, v)] \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} dudv.$$

これから，次のように書くことに導かれる．

$$dxdy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} dudv = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} dudv.$$

また，もし $y=x$ とおけば，行列式の二つの行が一致するから，値は $0$ となる．また，もし $x$ と $y$ とを交換すれば，行列式の符号が変る．これからヒントを得て，われわれの微分積分学における微分の掛算に対する次の2規則が生ずる：

$$\begin{cases} dxdx = 0, \\ dydx = -dxdy. \end{cases}$$

一般に，$n$ 変数 $x^1, \cdots, x^n$ に関する，$r$ **次(外)微分形式**とは，次のような式をいう．

$$\omega = \frac{1}{r!} \sum A_{i_1, \cdots, i_r} dx^{i_1} \cdots dx^{i_r}.$$

ここで係数 $A$ 達は，変数 $x^1, \cdots, x^n$ の滑らかな函数であり，添字 $i_1, \cdots, i_r$ について歪対称な量であるとする．

またわれわれは，各 $r$ 次微分形式 $\omega$ に対して，$\omega$ の外微分と呼ばれる一つの $(r+1)$ 次微分形式 $d\omega$ を対応させるであろう．その定義は，Stokes の公式の拡張

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} d\omega$$

が成り立つように与えられるであろう．ただしここで，$\Sigma$ は $(r+1)$ 次元の向きのついた多様体，$\partial\Sigma$ はその境界となっている多様体とする．

基本的な関係式の一つは，Poincaré の補題：

$$d(d\omega) = 0$$

である．これはどんな場合にも，種々の2階の偏微分係数の間の等式に帰着するのである．

## 1.2　テンソルとの比較

まず初めに，読者に次の保証をすることが出来る：微分形式を導入するからといって，テンソルを廃止しはしないことを．テンソルにも登場して貰う．非常に多くの場合，特に対称性を扱う場合には，テンソルの方法はとても自然で効果的だからである．しかしながら，他の多くの情況下では，外微分解析を用いて，それもしばしば É. Cartan の動座標系の方法と結びつけて使うことによって，テンソルのみでは大変困難な或る方法により，決定的な結果に導かれるのである．場合によっては，外微分解析とテンソルの二つのテクニックの結合が慣用手続になることもある．以下に若干の比較対照点をリストしよう．

(a)　テンソル解析は，**それ自身では**添字のついた量に関する計算技術のみからなっているように見える．それには，主題分野中で一たん確立されたら後は恒久的であるといった本質的な深い結果(その後で様々の応用があるわけだが)が欠けている．しかし外微分解析にはそのような諸結果よりなる本体が実際あるのである．

もし人が，通常のようにテンソルの方法で展開された Riemann 幾何学をもっと詳しく点検するならば，幾何学的諸結果が，他の機構によりもっと安価に得られないものかどうかを，真剣に問題にするに相異ない.

(b) 古典的なテンソル解析においては，人はその適用範囲を知ることは決してない．というのは，全く，空間が何であるかが決して語られていないからである．座標近傍の中では何事もうまく行くように見える．しかしわれわれは知っている：これが大抵の応用では不適切なことを．例えば質点が球面 $S^2$ 上を動くように束縛されているとき，ただ一つの座標系ではその位置空間を記述することは出来ない(その位相空間或いは状態空間はともかくとして).

この困難は近年になって，微分可能多様体の理論(これについては第V章で論ずる)によって克服されている.

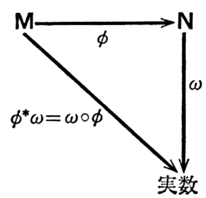
(c) テンソル場の，写像下の挙動は，あまり行儀のよいものではない．例えば，$x$-空間の反変ベクトル場 $a^i$ と，$x$-空間から $y$-空間への写像 $\phi$ が与えられたとき，$y$-空間に自然にひきおこされるような反変ベクトル場はないのである．($E^1$ から $E^2$ への写像 $t \to (t^2, t^3)$ の場合に試みてごらんなさい.)

この点については，外微分形式の場合には，実に魅惑的な情況が生ずるのである．すなわち，写像

$$\phi:\ M \to N$$

と，N 上の $p$ 次外微分形式 $\omega$ が与えられれば，M 上に自然に一つの $p$ 次外微分形式 $\phi^*\omega$ なるものがひきおこされるのである.

これを，最も簡単な場合，すなわち $\omega$ が 0 次外微分形式つまりスカラーの場合，すなわち N 上で定義された実数値の函数の場合に説明しよう．このときは，$\phi^*\omega$ は，写像 $\phi$ と $\omega$ の合成写像 $\omega\circ\phi$ ($\phi$ が先で次が $\omega$ である)に等しくな



る: $\phi^*\omega=\omega\circ\phi$.

(d) テンソル解析においては，混みいった添字のごたごたが，ともすれば人を迷子にしてしまい，テンソルによって表わされる種々のタイプの量(例えば，空間に接するベクトル，そのようなベクトルの間の写像，接空間の幾何学的構造など)の間の大変大きな相異を見失わせることが多い.

(e) テンソルの方法を使って，幾何学的ないし物理的情況下で，より深い不変量を発見するのは，局所的なものでさえ，全く困難だということがしばしばある．ところが外微分形式を使うと，それらが自然に，次の諸原理に従って，出て来るように思われる.

(i) すべての局所的な幾何学的関係式は，いずれにせよ，種々の偏微分係数間の等式，すなわち Poincaré の補題から生じたものである.

(ii) 通常では，局所不変量それ自身は，そこに姿を見せている各微分式に外微分演算を適用した結果として得られる.

(iii) 大域的な関係式は部分積分法，すなわち Stokes の定理から生ずる.

(iv) 本物の偏微分方程式(境界値問題或いは Cauchy 問題)でないような存在問題は，一般に，Frobenius-Cartan-Kähler 型の連立外微分方程式であって，従ってそのために，連立常微分方程式に帰着する.

(f) テンソルの方法で幾何学を学ぶとき，人はいつも局所座標系の定める**自然基底**(natural frame)に制限される．その例として Riemann 幾何学を考えよう．それは各接空間において Euclid 幾何学が与えられているような多様体である．自然基底は，各接空間に斜交座標系をもたらす．さて，一体全体どんな人間が，その真直ぐな心で，Euclid 幾何学を斜交座標系で研究しようとするだろうか？ もちろん，Euclid 幾何学にとっては直交座標系が自然なものであり，従ってもっと難しい Riemann 幾何学にとっても直交座標系が正しいものであるに相異ない．このようにして，**動基底**(moving frame)の概念に導かれる．この方法は外微分形式としっくりとうまく行くのである.

最後に結論としてわれわれの意見を述べよう：外微分解析は消えずにがんばり，そしてそれがもっと自然な道具であるような多くの情況下では，それはだ

んだんとテンソルの方法にとって代るであろう．外微分解析は，その内的な簡単さと，もっともっと使われることを切願している本質的な結果よりなる本体と，積分ある所必ず外微分形式ありという性質との故に，より多くの応用を見出すであろう．

一般に数学的理論とその応用の間には，50年ぐらいの時間の遅れがある．数学者 H. Poincaré, É. Goursat, É. Cartan は外微分解析を，本世紀の初期に展開した．最近20年間にそれは微分幾何学の再誕生に大きく貢献し，今や数学の主流の一部をなしている．物理学者たちもその有用性をはっきり覚り始めている．恐らく間もなく工学においても外微分解析はその価値を発揮するであろう．

# 第II章　外積代数

## 2.1　$p$-ベクトルの空間

記号

R = 実数 $a, b, c, \cdots$ のなす体.

L = 元 $\alpha, \beta, \cdots$ よりなる R 上の $n$ 次元ベクトル空間.

各 $p=0, 1, 2, \cdots, n$ に対して，R 上の一つの新しいベクトル空間

$$\bigwedge^p \mathsf{L}$$

を作ろう．それを **L 上の $p$-ベクトルの空間**という．まず

$$\bigwedge^0 \mathsf{L} = \mathsf{R}, \qquad \bigwedge^1 \mathsf{L} = \mathsf{L}$$

とおく．次に $\bigwedge^2 \mathsf{L}$ を少し詳しく述べよう．この空間 $\bigwedge^2 \mathsf{L}$ は，和

$$\sum a_i (\alpha_i \wedge \beta_i)$$

の全体からなり，これらの和の間には次の制約条件(或いは簡約法則)が，そしてこれらの簡約法則だけが，成り立つものとする：

$$\begin{cases} (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) \wedge \beta - a_1(\alpha_1 \wedge \beta) - a_2(\alpha_2 \wedge \beta) = 0, \\ \alpha \wedge (b_1\beta_1 + b_2\beta_2) - b_1(\alpha \wedge \beta_1) - b_2(\alpha \wedge \beta_2) = 0, \\ \alpha \wedge \alpha = 0, \\ \alpha \wedge \beta + \beta \wedge \alpha = 0. \end{cases}$$

ただしここで，$\alpha, \beta$ 等は L 中のベクトルであり，$a, b$ 等は実数である†．$\alpha \wedge \beta$ はベクトル $\alpha$ と $\beta$ との**外積**(exterior product)と呼ばれる．もし $\alpha$ と $\beta$ とが1次従属なら，例えば $\beta = c\alpha$ として，上の簡約法則により

$$\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge (c\alpha) = c\,(\alpha \wedge \alpha) = c \cdot 0 = 0$$

となる．$\alpha$ と $\beta$ とが1次独立ならば，$\alpha \wedge \beta \neq 0$ となる．

---

† (訳註)　数学的にうるさくいえば，$\wedge^2 \mathsf{L}$ は $(\alpha, \beta)$ ($(\alpha, \beta)$ は $L$ の元)達を基底とする R-自由加群 X (実数体上のベクトル空間)を，$(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2, \alpha) - a_1(\alpha_1, \beta) - a_2(\alpha_2, \beta)$，$(\alpha, b_1\beta_1 + b_2\beta_2) - b_1(\alpha, \beta_1) - b_2(\alpha, \beta_2)$，$(\alpha, \alpha)$ ($\alpha_i, b_i$ は実数，$\alpha, \alpha_i, \beta, \beta_i$ は $L$ の元)達の生成する部分空間 Y で割った商空間 X/Y である．$(\alpha, \beta)$ の定める Y の傍系(coset) $(\alpha, \beta) + \mathsf{Y}$ を $\alpha \wedge \beta$ と書くわけである．

さて $\sigma^1, \cdots, \sigma^n$ を L の基底としよう．すると

$$\alpha = \sum a_i\sigma^i, \qquad \beta = \sum b_j\sigma^j$$

と表わして，

$$\alpha \wedge \beta = (\sum a_i\sigma^i) \wedge (\sum b_j\sigma^j) = \sum a_ib_j(\sigma^i \wedge \sigma^j)$$

となる．これを次のように書き直す： $\sigma^i \wedge \sigma^i = 0$ および $\sigma^j \wedge \sigma^i = -\sigma^i \wedge \sigma^j$ が $i < j$ に対し成り立つから，

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{i<j} (a_ib_j - a_jb_i)\sigma^i \wedge \sigma^j$$

となる．$\bigwedge^2$L の一般の元は，このような外積の1次結合であるから，次の 2-ベクトル達

$$\sigma^i \wedge \sigma^j \qquad (1 \leqq i < j \leqq n)$$

が $\bigwedge^2$L の基底をなす．従って次式を得る．

$$\dim \bigwedge^2 \mathrm{L} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}.$$

一般に，$\bigwedge^p$L $(2 \leqq p \leqq n)$ が同じアイデアで作られる．$\bigwedge^p$L は形式的な和

$$\sum a(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p)$$

の全体よりなる(上のような和を **$p$-ベクトル**又は **$p$ 次のベクトル**という)．これらの和の満たすべき制約条件は次のものだけである．

(i) $(a\alpha + b\beta) \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p$

$$= a(\alpha \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p) + b(\beta \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p).$$

同じことが，各 $\alpha_i$ を1次結合でおきかえたときも成り立つものとする．

(ii) もし $i \neq j$, $\alpha_i = \alpha_j$ を満たすような添字の対 $(i, j)$ があれば，$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p = 0$.

(iii) 任意の二つの $\alpha_i, \alpha_j$ を交換すれば，$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p$ の符号が変る．

さて(i)から容易に，$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p$ は各変数について線型なことがわかる．任意の変数を，(2個に限らず)任意個数の他のベクトルの1次結合でおきかえて，その値を分配的に計算してよい．例えば

$$\alpha \wedge (b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3) \wedge \gamma \wedge \delta$$
$$= b_1(\alpha \wedge \beta_1 \wedge \gamma \wedge \delta) + b_2(\alpha \wedge \beta_2 \wedge \gamma \wedge \delta) + b_3(\alpha \wedge \beta_3 \wedge \gamma \wedge \delta).$$

(iii)から，$\{1, 2, \cdots, p\}$ の任意の置換 $\pi$ に対して

$$\alpha_{\pi(1)} \wedge \cdots \wedge \alpha_{\pi(p)} = (\operatorname{sgn} \pi) \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p$$

となることがわかる．$p=2$ の場合と全く同様に，L の基底

$$\sigma^1,\ \sigma^2,\ \cdots,\ \sigma^n$$

に対して，$\bigwedge^p \mathsf{L}$ の基底が次のように作られる：おのおのの添字の集合

$$H = \{h_1, h_2, \cdots, h_p\}, \qquad 1 \leqq h_1 < h_2 < \cdots < h_p \leqq n$$

に対して，

$$\sigma^H = \sigma^{h_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{h_p}$$

とおくと，$\sigma^H$ 達の全体が $\bigwedge^p \mathsf{L}$ の基底をなす．従って

$$\dim \textstyle\bigwedge^p \mathsf{L} = \binom{n}{p}$$

となる．すなわち $\bigwedge^p \mathsf{L}$ の次元は $n$ 個の物から同時に $p$ 個の物を取り出す組合せの個数に等しい．特に

$$\dim \textstyle\bigwedge^n \mathsf{L} = 1.$$

$\lambda$ が $\bigwedge^p \mathsf{L}$ の元ならば，

$$\lambda = \sum_H a_H \sigma^H$$

と書ける．ここで和は順序のついた集合 $H$ 達全体にわたる．これはまた，歪対称係数を導入して，添字の $p$ 個の組の‘全体’にわたる和の形にも書ける：

$$\lambda = \frac{1}{p!} \sum_{h_1, \cdots, h_p} b_{h_1, \cdots, h_p} \sigma^{h_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{h_p}.$$

ここで $b_{h_1, \cdots, h_p}$ は歪対称テンソルであり，しかも

$$b_{h_1, \cdots, h_p} = a_H \qquad (H = \{h_1, \cdots, h_p\},\ h_1 < h_2 < \cdots < h_p \text{ のとき})$$

で定まる．$\lambda$ のこの歪対称表示は，極めて有用なことが多い．

何故 $p > n$ に対して $\bigwedge^p \mathsf{L}$ を定義しないかを注意しておこう．($p > n$ に対して単に $\bigwedge^p \mathsf{L} = 0$ とおくのが便利なこともある.) 外積 $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p$ において，各 $\alpha_i$ を基底ベクトル $\sigma^1, \cdots, \sigma^n$ の1次結合として表わし，法則(i)によって分配律をすっかり適用すれば，次のようになる：

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p = \sum a_{h_1, \cdots, h_p} \sigma^{h_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{h_p}$$

ここで各項 $\sigma^{h_1}\wedge\cdots\wedge\sigma^{h_p}$ は，$\sigma^1, \cdots, \sigma^n$ の中からとられた $p\,(>n)$ 個のベクトルの外積であるから，重複する $h_i$ と $h_j$ がある筈である．よって法則(ii)により，これは0になる．すなわち，$\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_p=0$ しか起らない．

最後に空間 $\bigwedge^p\mathsf{L}$ の極めて重要な性質を述べよう．

$\bigwedge^p\mathsf{L}$ 上で定義された線型写像 $f$ を定めるには，$\mathsf{L}$ 上の $p$ 個の変数の函数 $g$ であって，次の(i), (ii)を満たすようなものを定めればよい：(i) $g$ は‘重線型’，すなわち各変数について別々に線型である，(ii) $g$ は次の意味で交代である．すなわち，二つの変数が等しいとき $g$ の値は0となり，また $g$ の二つの変数を交換すれば $g$ の値の符号が変る．すると，このような各 $g$ に対して，$\bigwedge^p\mathsf{L}$ 上の線型写像 $f$ が定まって，$\bigwedge^p\mathsf{L}$ の生成元に対して

$$f(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_p) = g(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$$

となる．逆に $f$ から $g$ も定まる．

この性質が実は $\bigwedge^p\mathsf{L}$ の公理的特徴づけを与えることが証明できるのである．次節ではこの性質を応用して，1次変換の行列式を定義しよう．

## 2.2 行 列 式

上のように，$\mathsf{L}$ は固定した $n$ 次元の線型空間(ベクトル空間)とし，$A$ を $\mathsf{L}$ から $\mathsf{L}$ への線型変換とする．そのとき，次のように $\mathsf{L}$ 上の $n$ 変数の函数 $g=g_A$ を定義する．

$$g_A(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = A\alpha_1\wedge\cdots\wedge A\alpha_n,$$

$$g_A\colon\ \bigtimes^n\mathsf{L}\to\bigwedge^n\mathsf{L}.$$

ただしここで $\bigtimes^n\mathsf{L}$ は，$\mathsf{L}$ の $n$ 個の直積 $\mathsf{L}\times\cdots\times\mathsf{L}$ を意味する．$g$ は重線型かつ交代であるから，線型写像 $f=f_A$:

$$f_A\colon\ \bigwedge^n\mathsf{L}\to\bigwedge^n\mathsf{L}$$

が存在して，

$$f_A(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_n) = g_A(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = A\alpha_1\wedge\cdots\wedge A\alpha_n$$

を満足する．しかるに $\bigwedge^n\mathsf{L}$ は1次元だから，この空間から自分自身への1次変換はスカラー倍しかない．特に上の $f_A$ に対応するスカラーを $|A|$ と書くと

$$A\alpha_1 \wedge \cdots \wedge A\alpha_n = |A|(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n)$$

となる．これを，$A$ の**行列式** $|A|$ の定義に採用することができる．ここで見逃してはならぬことは，この定義は，$A$ の行列表示には全く無関係なことである．

次に

$$\begin{aligned}|AB|(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) &= (AB\alpha_1) \wedge \cdots \wedge (AB\alpha_n)\\ &= |A|(B\alpha_1 \wedge \cdots \wedge B\alpha_n)\\ &= |A|\cdot|B|(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n)\end{aligned}$$

に注目すれば，次の公式が得られる．

$$|AB| = |A|\cdot|B|.$$

上記と，行列の行列式との関係は次の通りである．いま $\sigma^1, \cdots, \sigma^n$ を L の基底とし，$\|a_{ij}\|$ を $n$ 行 $n$ 列の行列とする．

$$\alpha_i = \sum_j a_{ij}\sigma^j$$

とおけば，次式を得る．

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n = |a_{ij}|(\sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^n).$$

特に，もし L の 1 次変換 $A$ の，基底 $(\sigma^i)$ に関する行列が

$$A\sigma^i = \sum a^i{}_j\sigma^j$$

ならば，

$$A\sigma^1 \wedge \cdots \wedge A\sigma^n = |a^i{}_j|(\sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma)$$

となる．すなわち

$$|A| = |a^i{}_j|.$$

## 2.3 外　　積

さて，われわれの空間 $\bigwedge^p$L 達は，**外積**と呼ばれ，記号 $\wedge$ で表わされる（その理由は明らかであろう）‘作りつけの’乗法演算をもっていることに注目しよう．$p$-ベクトル $\mu$ と $q$-ベクトル $\nu$ を掛けて $(p+q)$-ベクトル $\mu\wedge\nu$ が得られるのである（$p+q>n$ なら定義より $\mu\wedge\nu=0$）：

$$\wedge:\ (\bigwedge^p \mathsf{L}) \times (\bigwedge^q \mathsf{L}) \to \bigwedge^{p+q}\mathsf{L}.$$

乗法$\wedge$を定義するには，まず生成元に対して定義し，次に第1節最後に述べた基本原理を用いて，それをすべての$p$-ベクトルと$q$-ベクトルに拡張してやればよい：

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p) \wedge (\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_q) = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_q.$$

この外積演算の基本的性質は次の通りである：

(1) $\lambda \wedge \mu$は分配律を満たす.

(2) $\lambda \wedge (\mu \wedge \nu) = (\lambda \wedge \mu) \wedge \nu.$ (結合律)

(3) $\mu \wedge \lambda = (-1)^{pq} \lambda \wedge \mu.$

性質(3)のいうところは，奇数次の二つのベクトルの外積は，因子の順序を変えれば符号が変り，二つのベクトルの少くも一方が偶数次ならば，外積は因子の順序を変えても変らない，ということに他ならない．(3)が一般に成立することは次の例からわかるであろう．

$$\begin{aligned}(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) \wedge \beta &= -(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \beta \wedge \alpha_3)\\ &= (-1)^2(\alpha_1 \wedge \beta \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3)\\ &= (-1)^3 \beta \wedge (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3),\\ (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) \wedge (\beta_1 \wedge \beta_2) &= (-1)^3 \beta_1 \wedge (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) \wedge \beta_2\\ &= (-1)^3(-1)^3(\beta_1 \wedge \beta_2) \wedge (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3)\\ &= (-1)^{3\cdot 2}(\beta_1 \wedge \beta_2) \wedge (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3).\end{aligned}$$

**例** Lとして，微分$dx, dy, \cdots$の1次結合よりなる線型空間をとる．そして，通例のように，$dx$達の間の外積記号$\wedge$を省略する．かくして$dxdy$は$dx \wedge dy$を表わすわけである．

1. $(A\,dx + B\,dy + C\,dz) \wedge (E\,dx + F\,dy + G\,dz)$

$$= (BG - CF)\,dydz + (CE - AG)\,dzdx + (AF - BE)\,dxdy.$$

これは，二つの普通のベクトルのベクトル積(或いは外積)の説明になっている．

2. $(A\,dx + B\,dy + C\,dz) \wedge (P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy)$

$$= (AP + BQ + CR)\,dxdydz.$$

これは，ベクトル代数に出てくるスカラー積(内積)の説明になっている．

3. $\alpha$を任意の奇数次の微分形式とすれば

$$\alpha^2 = \alpha \wedge \alpha = 0.$$

何故なら，$\alpha$ と $\beta$ が奇数次数 $p$ をもてば

$$\beta \wedge \alpha = -\alpha \wedge \beta$$

である．ここで $\alpha=\beta$ とおけば，次が得られる．

$$\alpha \wedge \alpha = -(\alpha \wedge \alpha), \quad \therefore \quad 2(\alpha \wedge \alpha) = 0, \quad \therefore \quad \alpha \wedge \alpha = 0.$$

4. 力学に出てくる微分形式

$$\omega = dp_1 dq^1 + \cdots + dp_n dq^n$$

を考えよう．2次微分形式 $dp_i dq^i$ 達は互いに可換だから

$$\omega^n = (n!) dp_1 dq^1 dp_2 dq^2 \cdots dp_n dq^n$$
$$= (-1)^{n(n-1)/2} (n!) dp_1 \cdots dp_n dq^1 \cdots dq^n$$

となる．積 $dp_1 \cdots dq^n$ は**位相密度**と呼ばれている．これについては更に第X章で論じよう．

さて次に外積を応用して，行列式の補小行列式による Laplace 展開を求めよう．

$\|a_{ij}\|$ を $n$ 行 $n$ 列の行列とする．$H=\{h_1, \cdots, h_p\}$ に対して

$$b_H = \begin{vmatrix} a_{1,h_1} & \cdots & a_{1,h_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,h_1} & \cdots & a_{p,h_p} \end{vmatrix}$$

とおく．$p+q=n$ とおく．$K=\{k_1, \cdots, k_q\}$ に対して

$$c_K = \begin{vmatrix} a_{p+1,k_1} & \cdots & a_{p+1,k_q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,k_1} & \cdots & a_{n,k_q} \end{vmatrix}$$

とおく．かくして，もし $K$ が添字集合 $H$ の補集合 $H'$（つねに自然の順序——増加順——に並べておくものとするが）に等しいならば，$b_H$ と $c_K$ とは $\|a_{ij}\|$ の補小行列式になっているわけである．

さて，$(\sigma^j)$ を L の基底として

$$\alpha_i = \sum a_{ij} \sigma^j$$

とおけば，次の2式が容易に得られる：

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p = \sum b_H \sigma^H,$$

$$\alpha_{p+1}\wedge\cdots\wedge\alpha_n=\sum c_K\sigma^K.$$

従って

$$\begin{aligned}\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_n&=(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_p)\wedge(\alpha_{p+1}\wedge\cdots\wedge\alpha_n)\\&=\sum b_Hc_K\sigma^H\wedge\sigma^K\end{aligned}$$

となるが，ここで

$$\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_n=|a_{ij}|(\sigma^1\wedge\cdots\wedge\sigma^n)$$

および

$$\sigma^H\wedge\sigma^K=\begin{cases}0 & (K\neq H' \text{ のとき}),\\ \varepsilon^{H,H'}(\sigma^1\wedge\cdots\wedge\sigma^n) & (K=H' \text{ のとき})\end{cases}$$

であるから，次式が得られる：

$$|a_{ij}|=\sum_H\varepsilon^{H,H'}b_Hc_{H'}.$$

ここで量 $\varepsilon^{H,H'}=\pm1$ の値は次の通り：$H=\{h_1,\cdots,h_p\}$，$H'=\{k_1,\cdots,k_q\}$ ならば

$$\varepsilon^{H,H'}=\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ h_1 & h_2 & \cdots & k_q\end{pmatrix}.$$

すなわち，$\varepsilon^{H,H'}$ は順列 $h_1\cdots h_p\,k_1\cdots k_q$ の符号に等しい．

## 2.4 1次変換

この節では二つのベクトル空間 M, N を扱う．次元は

$$\dim \mathsf{M}=m,\qquad \dim \mathsf{N}=n$$

とする．基底の必要があるときは，$\sigma^1,\cdots,\sigma^m$ が M の基底で，$\tau^1,\cdots,\tau^n$ が N の基底であると約束しておく．

さて $A$ を1次変換とする：

$$A:\ \mathsf{M}\to\mathsf{N}.$$

すると写像

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)\to A\alpha_1\wedge\cdots\wedge A\alpha_p$$

は，

$$\times^p\mathsf{M}\to\textstyle\bigwedge^p\mathsf{N}$$

なる写像であって，しかも交代，重線型である．従って $\bigwedge^p\mathsf{M}$ から $\bigwedge^p\mathsf{N}$ の中

への1次変換を定義する．それを $\wedge^p A$ と書き，$A$ の**外積 $p$ 乗**(exterior $p$th power)という．$\wedge^p A$ は生成元に対して

$$(\wedge^p A)(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p) = A\alpha_1 \wedge \cdots \wedge A\alpha_p$$

で定義されるわけである．いま $A$ に対応する $m$ 行 $n$ 列の行列を $\|a^i{}_j\|$ としよう：

$$A\sigma^i = \sum a^i{}_j \tau^j.$$

すると，$\sigma^H$ および $\tau^K$ 達は，$H$ と $K$ がそれぞれ $p$ 個の添字の順序のついた集合上を動くとき，$\bigwedge^p \mathsf{M}$ および $\bigwedge^p \mathsf{N}$ の基底になる．この基底に関し

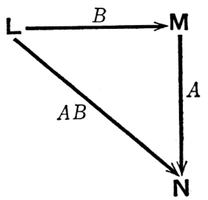
$$\begin{aligned}(\wedge^p A)\sigma^H &= A\sigma^{h_1} \wedge \cdots \wedge A\sigma^{h_p} \\ &= \sum a^{h_1}{}_{k_1} \cdots a^{h_p}{}_{k_p} \tau^{k_1} \wedge \cdots \wedge \tau^{k_p} \\ &= \sum a^H{}_K \tau^K\end{aligned}$$

であるから，$\wedge^p A$ の行列は，$\|a^i{}_j\|$ の $p$ 次小行列式全体からなる次の行列である：

$$\|a^H{}_K\|.$$

この行列は，行列 $\|a^i{}_j\|$ の**第 $p$ 複合行列**(the $p$th compound)とも呼ばれる．

さて，三つのベクトル空間 L, M, N の間に次の情況が起っているとしよう：




$\wedge^p(AB)$ を計算すると

$$\begin{aligned}\wedge^p(AB)(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p) &= (AB\alpha_1) \wedge \cdots \wedge (AB\alpha_p) \\ &= (\wedge^p A)[(B\alpha_1) \wedge \cdots \wedge (B\alpha_p)] \\ &= (\wedge^p A)[(\wedge^p B)(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p)] \\ &= [(\wedge^p A)(\wedge^p B)](\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p)\end{aligned}$$

であるから，次の公式を得る．

$$\wedge^p(AB) = (\wedge^p A)(\wedge^p B).$$

従って，二つの行列の積の第 $p$ 複合行列は，因子それぞれの第 $p$ 複合行列の積

になる．この結果は自明ではない．

さて考えるべき事柄がもう一つある．再び $A$: M→N とし，$\omega$ は $\bigwedge^p$M の元，$\eta$ は $\bigwedge^q$M の元とすると，

$$(\wedge^{p+q}A)(\omega\wedge\eta)=(\wedge^pA)(\omega)\wedge(\wedge^qA)(\eta)$$

となる．何故ならば，単項式 $\omega=\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_p$, $\eta=\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_q$ をとれば

$$\begin{aligned}(\wedge^{p+q}A)(\omega\wedge\eta)&=(\wedge^{p+q}A)(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_p\wedge\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_q)\\&=A\alpha_1\wedge\cdots\wedge A\beta_q\\&=(A\alpha_1\wedge\cdots\wedge A\alpha_p)\wedge(A\beta_1\wedge\cdots\wedge A\beta_q)\\&=(\wedge^pA)(\omega)\wedge(\wedge^qA)(\eta).\end{aligned}$$

## 2.5 内積空間

本章の残部では内積 $(\alpha,\beta)$ の与えられた空間 L を考察する．内積とは L×L 上の実数値の函数で次の 3 条件を満たすものをいう．

(i) 各変数について線型である．

(ii) 対称性: $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$.

(iii) 非退化性: $\alpha$ を固定して，$(\alpha,\beta)=0$ があらゆる $\beta$ について成り立てば，$\alpha=0$.

**例 1** $\mathsf{E}^n$ 上の Euclid 内積は次のように与えられる：

$$\alpha=(a_1,\cdots,a_n),\qquad \beta=(b_1,\cdots,b_n)$$

に対して

$$(\alpha,\beta)=a_1b_1+\cdots+a_nb_n.$$

**例 2** 4 次元空間の Lorentz 内積:

$$\alpha=(a_1,\cdots,a_4),\qquad \beta=(b_1,\cdots,b_4)$$

に対して

$$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3-c^2a_4b_4.$$

ここで $c$ は光速度である．

さて上の条件 (iii) は次に同値である：$\sigma^1,\cdots,\sigma^n$ が L の基底ならば

$$|(\sigma^i,\sigma^j)|\neq 0.$$

(左辺の量をグラム行列式又は**グラミアン**という.) 何故ならば, この行列式が 0 になるための必要十分条件は次の連立同次方程式

$$\sum a_i(\sigma^i, \sigma^j) = 0$$

に, 自明でない解 $(a_1, \cdots, a_n)$ (すなわち少くも一つの $a_i$ が $\neq 0$ なる解) が存在することである. しかし, このことはベクトル

$$\alpha = \sum a_i \sigma^i$$

が, あらゆるベクトル $\beta$ に対して, $(\alpha, \beta)=0$ を満たすことと同じだからである.

L の**正規直交系** (orthonormal basis) とは, 次の条件を満たすような L の基底 $\sigma^1, \cdots, \sigma^n$ をいう:

$$(\sigma^i, \sigma^j) = \pm\delta^{ij}.$$

これらの中で正の符号が $r$ 個, 負の符号が $s$ 個あれば, $r+s=n$ であるが, $t=r-s$ なる量を, 与えられた内積の**符号定数** (signature) という. $t$ なる量は L の基底のとり方には依存しない.

次の事項は基本的である: "どんな内積空間 L も正規直交系をもつ." これを数段階にわけて証明しよう.

1. もし $\dim L>0$ ならば, L 中にベクトル $\sigma$ が存在して, $(\sigma, \sigma)\neq 0$ となる. 何故ならば, もしあらゆる $\alpha$ に対して, $(\alpha, \alpha)=0$ ならば,

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha+\beta, \alpha+\beta) = (\alpha, \alpha)+2(\alpha, \beta)+(\beta, \beta) \\ &= 2(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

よって, あらゆる $\alpha, \beta$ に対して $(\alpha, \beta)=0$ となるが, これは非退化性に矛盾する.

2. 条件

$$(\sigma^i, \sigma^j) = \pm\delta^{ij}$$

を満たすベクトル列の中で**極大**なものをとり, それを $\sigma^1, \cdots, \sigma^r$ とする. これらの張る L の部分空間を M とすれば $\dim M=r$ となる. ($\sigma^1, \cdots, \sigma^r$ は 1 次独立である. 実際 $\sum a_i\sigma^i=0$ から $\sum a_i(\sigma^i, \sigma^j)=0$, $\therefore$ $\pm a_j=0$.) いま $r<n$ と仮定しよう.

3. N を M の直交補空間とする. すなわち, N は, M の各元 $\alpha$ に対して $(\alpha, \beta)$

$=0$ を満たすようなベクトル $\beta$ の全体のなす部分空間である．N は $r$ 個の1次方程式 $(\sigma^i, \beta)=0$ $(1\leqq i\leqq r)$ で定まるから，$\dim \mathsf{N}\geqq n-r$ である．一方，明らかに $\mathsf{M}\cap\mathsf{N}=0$ (すなわち，M と N に共通なベクトルは0のみである)，よって，$\dim \mathsf{N}=n-r$ で，M と N とを合わせて L を張らねばならぬ：$\mathsf{M}+\mathsf{N}=\mathsf{L}$.

4. N 自身も，L の内積に関して内積空間をなす．それには非退化性 (iii) だけ検証すればよい．$\beta$ を N の元とし，$(\gamma, \beta)=0$ が N の各元 $\gamma$ に対して成り立つとしよう．M のあらゆる元 $\alpha$ に対しては $(\alpha, \beta)=0$ であるから，M と N とで L を張ることを用いて，L のあらゆる元 $\alpha$ に対して $(\alpha, \beta)=0$. よって $\beta=0$.

5. 上の1により $(\alpha, \alpha)\neq 0$ なる N のベクトル $\alpha$ がある．そこで

$$\sigma^{r+1}=\frac{\alpha}{|(\alpha, \alpha)|^{1/2}}$$

とおくと，極大列よりも長い列 $\sigma^1, \cdots, \sigma^{r+1}$ がさっきの条件 $(\sigma^i, \sigma^j)=\pm\delta^{ij}$ を満たすことがわかる．これは矛盾だから，実は $r=n$ でなければならなかったわけである．これで証明が完了した.

後から必要な，内積空間のもう一つの基本的性質がある：

"$f$ を L 上の線型汎函数(すなわち L から実数体の中への線型写像)とすれば，L 中にベクトル $\beta$ が一意的に存在して

$$f(\alpha)=(\alpha, \beta)$$

となる."

証明は正規直交系 $\sigma^1, \cdots, \sigma^n$ をとって容易に出る．$b_i=f(\sigma^i)$ とおき，$\beta$ として次のベクトルをとればよい.

$$\beta=\sum \pm b_j\sigma^j=\sum (\sigma^j, \sigma^j) b_j\sigma^j.$$

何故なら，そのとき

$$(\sigma^i, \beta)=\sum_j (\sigma^j, \sigma^j) b_j (\sigma^i, \sigma^j)=b_i=f(\sigma^i)$$

となるからである.

## 2.6 $p$-ベクトル間の内積

再び内積 $(\alpha, \beta)$ をもった $n$ 次元ベクトル空間 L から出発する．ベクトル空

間 $\bigwedge^p\mathsf{L}$ のおのおのの上で，誘導された内積なるものを定義しよう．$\lambda=\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_p$ と $\mu=\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_p$ に対して

$$(\lambda, \mu) = |(\alpha_i, \beta_j)| \qquad (p\ 次行列式)$$

とおく．この定義が $\lambda, \mu$ の表わし方によらないことは，右辺の行列式が $\alpha_i$ 達についても，また $\beta_i$ 達についても交代重線型函数であることからわかる．すなわち上の式により，$(\bigwedge^p\mathsf{L})\times(\bigwedge^p\mathsf{L})$ 上のスカラー値が定義され，各変数について線型である．次に $(\mu, \lambda)=(\lambda, \mu)$ の成立は，転置行列(行と列をいれかえた行列)に移っても行列式の値が変らないからである．

この内積の非退化性は，$\mathsf{L}$ の正規直交系 $\sigma^1, \cdots, \sigma^n$ に関して計算すれば，最も容易にわかる：例によって，$\sigma^H, H=\{h_1, \cdots, h_p\}$ 達が $\bigwedge^p\mathsf{L}$ の基底をなすが，

$$(\sigma^H, \sigma^K) = |(\sigma^{h_i}, \sigma^{k_j})|$$

である．$H\neq K$ のときこの値は 0 である．何故なら右辺の行列式の或る行(或る列も) 0 からなるから．$H=K$ なら対角成分以外は 0 で，対角成分は $\pm1$ だから

$$(\sigma^H, \sigma^K) = \pm\delta^{H,K}$$

となる．換言すれば，$\sigma^H$ 達は $\bigwedge^p\mathsf{L}$ の正規直交系をなす．非退化性はこれから直ちにわかる．

特に，$\sigma=\sigma^1\wedge\cdots\wedge\sigma^n$ は $\bigwedge^n\mathsf{L}$ の正規直交系であって，

$$(\sigma, \sigma) = (\sigma^1, \sigma^1)\cdots(\sigma^n, \sigma^n) = (-1)^{(n-t)/2}$$

となる．ここで $t$ は $\mathsf{L}$ の符号定数である．

他の例を述べよう．

$$\alpha^i = \sigma^1\wedge\cdots\wedge\sigma^{i-1}\wedge\sigma^{i+1}\wedge\cdots\wedge\sigma^n$$

とおくと，$\alpha^1, \cdots, \alpha^n$ は $\bigwedge^{n-1}\mathsf{L}$ の基底をなす．明らかに

$$(\alpha^i, \alpha^i) = (\sigma, \sigma)/(\sigma^i, \sigma^i) = (\sigma, \sigma)(\sigma^i, \sigma^i)$$

であるから，次式を得る．

$$\begin{aligned}(\textstyle\sum a_i\alpha^i, \sum b_j\alpha^j) &= (\sigma, \sigma)\textstyle\sum(\sigma^i, \sigma^i)a_ib_i\\ &= (\sigma, \sigma)(\textstyle\sum a_i\sigma^i, \sum b_j\sigma^j).\end{aligned}$$

## 2.7 星印作用素

再びLは内積$(\alpha, \beta)$をもつとする．Lに一定の向きをつけ，それを以下固定する．（向きをつけるという意味は，Lの一つの基底をとり，他の基底としては，この基底から正の行列式をもった行列で移れるようなものしか考えないということである.）きめた向きに合う基底だけを用いることにする．

(Hodgeの)**星印作用素**(star operator)と呼ばれる一つの作用素$*$を定義する．これは$\bigwedge^p \mathsf{L}$から$\bigwedge^{n-p}\mathsf{L}$上への1次変換である．この作用素は内積はもちろんのこと，向きにも依存する．向きを逆にすると，作用素$*$の符号が変るのである．

Lの向きをきめれば，$\bigwedge^n \mathsf{L}$の正規直交系$\sigma$が確定することに注意しておく．

さて$\bigwedge^p \mathsf{L}$の元$\lambda$を固定して，次の写像を考える：

$$\mu \to \lambda \wedge \mu.$$

これは$\bigwedge^{n-p}\mathsf{L}$から1次元空間$\bigwedge^n \mathsf{L}$の中への1次変換であるから

$$\lambda \wedge \mu = f_\lambda(\mu)\sigma$$

と書ける．ただし$f_\lambda$は$\bigwedge^{n-p}\mathsf{L}$上の線型汎函数である．2.5節の最後の結果により，或る一つの$(n-p)$-ベクトル(それは$\lambda$に依存するから$*\lambda$と書く)が一意的に存在して，

$$\lambda \wedge \mu = (*\lambda, \mu)\sigma$$

となる．この等式により写像$*$が定義される．$*$は明らかに$\bigwedge^p \mathsf{L}$から$\bigwedge^{n-p}\mathsf{L}$の中への線型写像である．

$\bigwedge^p \mathsf{L}$の生成元に対して$*\lambda$を計算するには，線型性があるから，$\lambda = \sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^p$に対して$*\lambda$を計算すれば十分である．ただしここで，$\sigma^1, \cdots, \sigma^n$は正規直交系とする．$K$に$q=n-p$個の添字よりなる集合上を走らせよう．すると

$$\lambda \wedge \sigma^K = (*\lambda, \sigma^K)\sigma$$

であるが，左辺は$K=\{p+1, p+2, \cdots, n\}$以外のときは0になる．よって

$$*\lambda = c\sigma^{p+1} \wedge \cdots \wedge \sigma^n$$

の形となり，定数$c$は$K=\{p+1, \cdots, n\}$をとることによって定まる：

$$\sigma = \lambda \wedge \sigma^K = c(\sigma^K, \sigma^K)\sigma,$$

$$\therefore \quad c = (\sigma^K, \sigma^K) = \pm 1.$$

よって次の公式を得る.

$$*\lambda = (\sigma^K, \sigma^K)\sigma^K.$$

考えを決めるために, $H=\{1, \cdots, p\}$, $K=\{p+1, \cdots, n\}$ とおけば, 上に証明したように

$$*\sigma^H = (\sigma^K, \sigma^K)\sigma^K$$

である. 一方 $\sigma^K \wedge \sigma^H = (-1)^{p(n-p)}\sigma^H \wedge \sigma^K$ だから, 向きを考慮にいれれば

$$*\sigma^K = (-1)^{p(n-p)}(\sigma^H, \sigma^H)\sigma^H$$

となる. よって

$$*(*\sigma^H) = (-1)^{p(n-p)}(\sigma^H, \sigma^H)(\sigma^K, \sigma^K)\sigma^H.$$

すなわち

$$*(*\sigma^H) = (-1)^{p(n-p)}(\sigma, \sigma)\sigma^H$$
$$= (-1)^{p(n-p)+(n-t)/2}\sigma^H$$

となる. "ここで $t$ は符号定数である."

従って, "任意の $p$-ベクトル $\alpha$ に対して"

$$**\alpha = (-1)^{p(n-p)+(n-t)/2}\alpha$$

となる. これらの公式から出るもう一つのことは:

"$p$-ベクトル $\alpha$ と $\beta$ に対して"

$$\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha = (-1)^{(n-t)/2}(\alpha, \beta)\sigma.$$

何故なら, 上のように $\beta=\sigma^H$ のとき, $\alpha=\sigma^J$ の形の生成元で両辺が 0 にならないのは $\alpha=\sigma^H$ だけである. そしてそのときは

$$\alpha \wedge *\beta = \sigma^H \wedge (\sigma^K, \sigma^K)\sigma^K = (\sigma^K, \sigma^K)\sigma$$
$$= (\sigma^H, \sigma^H)(-1)^{(n-t)/2}\sigma$$
$$= (-1)^{(n-t)/2}(\alpha, \beta)\sigma.$$

**例 1** 4次元空間を考える. それは次のように正規化された座標をそなえているとする: $dx^1, dx^2, dx^3, dt$ が正規直交系で $(dx^i, dx^i)=1$, $(dt, dt)=-1$. $n=4$, $t=2$ だから $(-1)^{(n-t)/2}=-1$ である. 或る2次外微分形式を考えよう. $p=2$ のときは $p(n-p)=4$ だから

$$*(dx^i dt) = dx^j dx^k$$

となる．ここで $(i, j, k)$ は $(1, 2, 3)$ の巡回置換(すなわち $(i, j, k)$ は $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ のいずれか)である．また

$$*(dx^j dx^k) = -dx^i dt$$

である．いま電場の強さを表わすベクトルの成分を $E_i$ とし，磁場の強さを表わすベクトルの成分を $H_i$ とする．(いずれも自由空間においてとする.) そして次の微分形式を考えよう.

$$\omega = (E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3)\,dt + (H_1 dx^2 dx^3 + H_2 dx^3 dx^1 + H_3 dx^1 dx^2).$$

すると

$$*\omega = -(H_1 dx^1 + H_2 dx^2 + H_3 dx^3)\,dt + (E_1 dx^2 dx^3 + E_2 dx^3 dx^1 + E_3 dx^1 dx^2)$$

となる．これらの公式の Maxwell の方程式での使い方を後から見るであろう.

**例 2**　通常の計量をもった $\mathsf{E}^3$．函数 $f, g$ に対して

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

$$*df = \frac{\partial f}{\partial x}dydz + \frac{\partial f}{\partial y}dzdx + \frac{\partial f}{\partial z}dxdy$$

だから,

$$df \wedge *dg = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z}\right)dxdydz.$$

## 2.8 問　　題

**1.** $\mathsf{L}$ を $n$ 次元空間とする．各 $p$-ベクトル $\alpha$ $(\alpha \neq 0)$ に対して $\alpha \wedge \sigma = 0$ を満たすような $\mathsf{L}$ のベクトル $\sigma$ の全体のなす部分空間を $\mathsf{M}_\alpha$ とおく．$\dim(\mathsf{M}_\alpha) \leqq p$ を証明せよ．また，$\dim(\mathsf{M}_\alpha) = p$ が成り立つためには，$\alpha$ が $\mathsf{L}$ の適当なベクトル $\sigma_1, \cdots, \sigma_p$ により $\alpha = \sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_p$ の形に書けることが必要十分である．これを証明せよ.

**2.** (つづき)任意の $(n-1)$-ベクトル $\alpha$ は，$\mathsf{L}$ の適当なベクトル $\sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$ により $\alpha = \sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_{n-1}$ と書けることを証明せよ.

**3.** $\mathsf{L}$ を $n$ 次元ベクトル空間，$\alpha$ を 2-ベクトルとする．このとき $\mathsf{L}$ の基底

$\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ が存在して

$$\alpha = \sigma_1 \wedge \sigma_2 + \sigma_3 \wedge \sigma_4 + \cdots + \sigma_{2r-1} \wedge \sigma_{2r}$$

となることを示せ．数 $2r$ は $\alpha$ にしか依存しない．これを 2-ベクトル $\alpha$ の**階数**(rank) という．これについて $\alpha^r \neq 0$, $\alpha^{r+1}=0$ を示せ．

**4.** （つづき）$\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ を L の基底とし，$A=\|a_{ij}\|$ を歪対称行列とする．行列 $A$ の階数は，2-ベクトル

$$\alpha = \frac{1}{2} \sum a_{ij} \sigma_i \wedge \sigma_j$$

の階数に一致することを示せ．

**5.** $\dim \mathsf{L}=n$ とし，1 次変換

$$A: \mathsf{L} \to \mathsf{L}$$

が与えられたとする．次の行列式の値を求めよ．

$$|\wedge^p A|.$$

**6.** $A$ を $m$ 行 $n$ 列の行列，$B$ を $n$ 行 $m$ 列の行列とし，$m<n$ とする．次式を証明せよ．

$$|AB| = \sum a_H b_H.$$

ただし，ここで $H$ は次のような，順序のついた集合上にわたる：

$$H = \{h_1, h_2, \cdots, h_m\}, \qquad 1 \leqq h_1 < h_2 < \cdots < h_m \leqq n.$$

そして $a_H, b_H$ の意味は次の通り：

$$a_H = \begin{vmatrix} a_{1,h_1} & \cdots & a_{1,h_m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,h_1} & \cdots & a_{m,h_m} \end{vmatrix}, \qquad b_H = \begin{vmatrix} b_{h_1,1} & \cdots & b_{h_1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{h_m,1} & \cdots & b_{h_m,m} \end{vmatrix}.$$

次の特別な場合

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \qquad B = {}^t A \quad (\text{転置行列})$$

には，ベクトル代数のよく知られた公式

$$|\mathsf{a} \times \mathsf{b}|^2 = |\mathsf{a}|^2 |\mathsf{b}|^2 - (\mathsf{a} \cdot \mathsf{b})^2$$

が得られることに注意しておく．

**7.** $A$ を $n$ 行 $n$ 列の行列とし，$A$ の余因子 (cofactor) のなす行列を cof $A$

と書く．（すなわち $A(\mathrm{cof}\ A)=(\mathrm{cof}\ A)A=|A|\cdot I$ が成り立つような行列が cof $A$ である.）$\wedge^p(\mathrm{cof}\ A)$ の成分を一般に $b_{H,K}$ とするとき

$$b_{H,K} = \pm|A|^{p-1}a_{H',K'}$$

を示せ.

ここで $H'$ は添字集合 $H$ の補集合，$K'$ についても同様である．また $a_{H',K'}$ は行列

$$\wedge^{n-p}A$$

の対応する成分である.

**8.** 外積代数の言葉で，次のベクトル代数の公式をいい表わせ.

$$\alpha\times(\beta\times\gamma)=(\alpha\cdot\gamma)\beta-(\alpha\cdot\beta)\gamma.$$

# 第III章　外　微　分

## 3.1　微分形式

$P$ を $\mathsf{E}^n$ の1点とする．“点 $P$ における1次外微分形式(one-form)”とは，次のような式をいう．

$$\sum_1^n a_i dx^i \qquad (a_i \text{ 達は定数}).$$

点 $P$ におけるこれらの1次外微分形式の全体は，$n$ 次元の線型空間 $\mathsf{L}=\mathsf{L}_p$ をなす†．点 $P$ における **$p$ 次外微分形式**，略して **$p$-形式**($p$-form)とは

$$\bigwedge^p \mathsf{L} = \bigwedge^p \mathsf{L}_p$$

の元をいう．すなわち，次のような式である．

$$\sum a_H dx^{h_1} \cdots dx^{h_p} \qquad (a_H \text{ は定数}).$$

外積記号 $\wedge$ を省略していることに注意しておく．従って $dx^i$ 達を並べて書いたときは，つねに外積の意味の掛算をしているわけである．

さて，$\mathsf{U}$ を $\mathsf{E}^n$ 中の(開)領域とする．**$\mathsf{U}$ 上の $p$ 次外微分形式**略して $p$-形式とは，$\mathsf{U}$ の各点 $P$ でその点における $p$-形式を一つずつえらび，しかもこのことを $\mathsf{U}$ 上で滑らかに(すなわち連続的微分可能に)行なって得られるものをいう．かくして $p$-形式 $\omega$ は次のように表わされる：

$$\omega = \sum a_H(x^1, \cdots, x^n)\, dx^H.$$

ここで函数 $a_H(\mathsf{x})$ 達は $\mathsf{U}$ 上で滑らか(望む回数だけ連続的微分可能)である．

$\mathsf{U}$ の各点で外積代数が適用されるから，$\mathsf{U}$ 上の外微分形式達についても，外積代数の概念が適当な解釈の下に持ちこめることになる．かくして，$\mathsf{U}$ 上の $p$-形式 $\omega$ と $q$-形式 $\eta$ に対して，$\omega\wedge\eta$ は $\mathsf{U}$ 上の $(p+q)$-形式になる．(もちろん $p+q>n$ なら $\omega\wedge\eta=0$.) また

$$\omega = \sum a_H dx^H, \qquad \eta = \sum b_K dx^K$$

---

† (訳註)　すなわち，$\mathsf{L}$ は記号 $dx^1, \cdots, dx^n$ を基底とする $\mathsf{R}$ 上のベクトル空間として定義されている．

ならば

$$\omega\wedge\eta=\sum a_H b_K dx^H dx^K$$

となるから，$\omega\wedge\eta$ の係数はやはり滑らかな函数である($\omega$と $\eta$ の係数の多項式だから).

例えば 1-形式

$$\omega=P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

は，$\mathsf{E}^3$ 中の通常のベクトル場$(P, Q, R)$と同一視される．また 2-形式

$$\alpha=A\,dydz+B\,dzdx+C\,dxdy$$

は，$\mathsf{E}^3$ 中の極性ベクトル場と同一視される.

## 3.2 外 微 分

**U 上の $p$-形式の全体**を

$$\mathsf{F}^p(\mathsf{U})$$

と書く．特に，$\mathsf{F}^0(\mathsf{U})$ は U 上の滑らかな函数全体のなす集合に他ならない.

さて，各 $p$-形式 $\omega$ を $(p+1)$-形式 $d\omega$ にもって行く所の作用素 $d$ なるものを設定しよう．まず $\mathsf{E}^3$ では次のようにするのである：0-形式(すなわち函数) $f$ に対しては

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

とおく．また上記の 1-形式 $\omega$ に対しては

$$d\omega=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

とおく．次に，上記の 2-形式 $\alpha$ に対しては

$$d\alpha=\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)dxdydz$$

とおく．かくして作用素 $d$ は，通常の勾配(gradient)，回転(curl または rotation)および発散(divergence)の演算を含むことになる.

後からわかるように，$d$ は座標系のとり方には全く無関係なのである．このことは $d$ を公理的にとらえることにより多少はっきりするであろう.

次の諸性質をもつような作用素

$$d:\ \mathsf{F}^p(\mathsf{U}) \to \mathsf{F}^{p+1}(\mathsf{U})$$

が存在してしかも一意的であることを証明しよう：

(i)　$d(\omega+\eta)=d\omega+d\eta.$

(ii)　$d(\lambda\wedge\mu)=d\lambda\wedge\mu+(-1)^{(\deg\lambda)}\lambda\wedge d\mu$　　($\deg\lambda$ は $\lambda$ の次数).

(iii)　各 $\omega$ に対して，$d(d\omega)=0.$

(iv)　各函数 $f$ に対して，

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

座標函数に適用したときに(iv)が無矛盾なることに注意しておく．例えば，$x^1$ は $\mathsf{U}$ 上の函数であって，この函数 $x^1$ に $d$ を適用した結果として得られる $d(x^1)$ は**正に記号 $dx^1$ に他ならない**のである．従って，もしかかる $d$ があれば(iii)から $d(dx^1)=0$ となる．

まずこのような作用素 $d$ はただ一つしかないことを証明する．それにはまず

$$d(dx^{h_1}\cdots dx^{h_p}) = 0$$

を $p$ での帰納法で証明する．いま注意しておいたように $p=1$ なら成り立つ．$p-1$ でも成り立つとすれば，(ii)より

$$d[x^{h_1}(dx^{h_2}\cdots dx^{h_p})] = dx^{h_1}\cdots dx^{h_p}.$$

従って(iii)から

$$d(dx^{h_1}\cdots dx^{h_p}) = d\{d(x^{h_1}dx^{h_2}\cdots dx^{h_p})\} = 0$$

を得る．さて $p$-形式 $\omega$ に対して

$$\omega = \sum a_H(\mathsf{x})\,dx^H$$

とおくと

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum d(a_H dx^H) \\ &= \sum (da_H)\,dx^H \\ &= \sum \frac{\partial a_H}{\partial x^j} dx^j dx^H \end{aligned}$$

となり，これは処方(i-iv)で $d\omega$ が完全に定まることを示している．次にその

ような作用素 $d$ が存在することを証明するには，$\omega=\sum a_H dx^H$ に対して

$$d\omega = \sum \frac{\partial a_H}{\partial x^j} dx^j dx^H$$

とおいて，求める性質が満たされていることを確かめさえすればよい．性質(i)と(iv)とは全く明らかである．(ii)と(iii)を見よう．明らかに，これらを単項式について確立することができれば，和に移って一般に成り立つことになる．

$$\lambda = a\, dx^H, \qquad \mu = b\, dx^K$$

とすれば

$$\begin{aligned}
d(\lambda\wedge\mu) &= d(ab\, dx^H dx^K)\\
&= \sum \frac{\partial(ab)}{\partial x^i} dx^i dx^H dx^K\\
&= \sum \frac{\partial a}{\partial x^i} b\, dx^i dx^H dx^K + \sum a \frac{\partial b}{\partial x^i} dx^i dx^H dx^K\\
&= \sum \left(\frac{\partial a}{\partial x^i} dx^i dx^H\right)\wedge(b\, dx^K)\\
&\quad + (-1)^{(\deg\lambda)} \sum (a\, dx^H)\wedge\left(\frac{\partial b}{\partial x^i} dx^i dx^K\right)\\
&= (d\lambda)\wedge\mu + (-1)^{(\deg\lambda)} \lambda\wedge d\mu
\end{aligned}$$

となる．ここで符号については次のことを使った：

$$dx^i dx^H = (-1)^{(\deg\lambda)} dx^H dx^i.$$

これで(ii)が証明された．

次に再び $\omega=a\, dx^H$ として

$$\begin{aligned}
d(d\omega) &= d\left(\sum \frac{\partial a}{\partial x^i} dx^i dx^H\right)\\
&= \sum \frac{\partial^2 a}{\partial x^i \partial x^j} dx^j dx^i dx^H\\
&= \frac{1}{2} \sum \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 a}{\partial x^j \partial x^i}\right) dx^j dx^i dx^H\\
&= 0.
\end{aligned}$$

これで(iii)が確かめられた．

性質(iii)は2階の偏導函数が偏微分の順序によらないということに過ぎないのである．これは，偏微分方程式や微分幾何学におけるたいていの‘積分可能条件’の源泉である．これは通常 **Poincaré の補題**と呼ばれている．

## 3.3 写　　像

次の情況を考えよう．U は $E^m$ 中の領域，V は $E^n$ 中の領域で，$\phi$ は U から V の中への滑らかな写像とする．これを

$$\phi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{V}$$

と書く．また $E^m$ の座標を $x^1, \cdots, x^m$ と書き，$E^n$ の座標を $y^1, \cdots, y^n$ と書く．すると，座標 x をもつ点が $\phi$ により座標 y の点に変換されることを示すのに

$$y^i = y^i(x^1, \cdots, x^m)$$

と書ける．函数 $y^i(\mathrm{x})$ 達は滑らかである．

前のように実数体を R と書く．V 上の任意の実数値函数 $g$ があるとしよう：

$$g\colon \mathrm{V} \to \mathrm{R}.$$

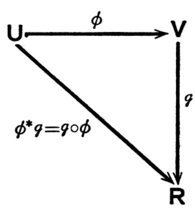
すると，これと $\phi$ とを結合して U から R への函数ができる．それを

$$\phi^* g = g \circ \phi$$

と書く．かくして，

$$\phi^*\colon \mathrm{F}^0(\mathrm{V}) \to \mathrm{F}^0(\mathrm{U})$$

である．すなわち U から V への写像 $\phi$ から，$\mathrm{F}^0(\mathrm{V})$ から $\mathrm{F}^0(\mathrm{U})$ への一つの新しい写像 $\phi^*$($\phi$ からひきおこされた写像)を作ったことになる：




さて，V 上の $p$-形式を U 上の $p$-形式に持って行くような一つの写像 $\phi^*$ を定義することにしよう：

$$\phi^*\colon \mathrm{F}^p(\mathrm{V}) \to \mathrm{F}^p(\mathrm{U}).$$

(厳密にいうならば，$\phi^*$ には添字をつけて $\phi_p{}^*$, $p=0, 1, \cdots$ と書くべきであるが，この点は逃げておく.) 既に $p=0$ の場合はやってしまったが，決定的な場合は $p=1$ のときである．それを済ませれば，第Ⅱ章の代数的考察によって残部がうまく行く．

基本的なアイデアは，**座標函数を代入すること**である．すなわち，$dy^i$ を次のもので置き換えるのである：

$$\sum \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j.$$

かくして，$\mathsf{V}$ 上の 1-形式 $\omega=\sum a_i(\mathsf{y})dy^i$ に対して，

$$\phi^*\omega = \sum a_i(\mathsf{y}(\mathsf{x}))\frac{\partial y^i}{\partial x^j}dx^j$$

とおく．これで

$$\phi^*:\ \mathsf{F}^1(\mathsf{V}) \to \mathsf{F}^1(\mathsf{U})$$

が得られた．2.4 節の方法により，この写像を外積に拡張すれば

$$\phi^*:\ \mathsf{F}^p(\mathsf{V}) \to \mathsf{F}^p(\mathsf{U})$$

が得られる．例えば

$$\begin{aligned}
\phi^*(dy^1dy^2) &= (\phi^*dy^1)(\phi^*dy^2) \\
&= \left(\sum \frac{\partial y^1}{\partial x^i}dx^i\right)\left(\sum \frac{\partial y^2}{\partial x^j}dx^j\right) \\
&= \sum \frac{\partial y^1}{\partial x^i}\frac{\partial y^2}{\partial x^j}dx^idx^j \\
&= \frac{1}{2}\sum\left(\frac{\partial y^1}{\partial x^i}\frac{\partial y^2}{\partial x^j}-\frac{\partial y^1}{\partial x^j}\frac{\partial y^2}{\partial x^i}\right)dx^idx^j \\
&= \frac{1}{2}\sum\frac{\partial(y^1, y^2)}{\partial(x^i, x^j)}dx^idx^j.
\end{aligned}$$

次に $\phi^*$ の基本的性質をリストしよう．

(i)　$\phi^*(\omega+\eta)=\phi^*\omega+\phi^*\eta$.

(ii)　$\phi^*(\lambda\wedge\mu)=(\phi^*\lambda)\wedge(\phi^*\mu)$.

(iii)　$\omega$ が $\mathsf{V}$ 上の $p$-形式ならば，

$$d(\phi^*\omega) = \phi^*(d\omega).$$

(iv)　$\phi$: $\mathsf{U} \to \mathsf{V}$,　$\psi$: $\mathsf{V} \to \mathsf{W}$ ならば

$$(\psi\circ\phi)^* = \phi^*\circ\psi^*.$$

性質(i)は明らかだし，性質(ii)は2.4節の最後の公式から出る．

性質(iii)は本質的には，合成函数の偏微分法の法則(鎖の法則(chain rule)ともいう)である．まず $\mathsf{V}$ 上の 0-形式(函数) $g$ をとると

$$dg = \sum \frac{\partial g}{\partial y^j} dy^j,$$

よって

$$\phi^* dg = \sum \frac{\partial g(\mathsf{y}(\mathsf{x}))}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i$$

$$= \sum \frac{\partial(\phi^* g)}{\partial x^i} dx^i = d\phi^* g.$$

以下帰納法で進行する：$(p-1)$-形式については(iii)を確かめたとする．任意の $p$-形式は単項式の和だから，単項式 $\omega$ について(iii)を検証すれば十分である．すると

$$\omega = g\, dy^H = g\, d\eta$$

とおける．ただし，$\eta = y^{h_1} dy^{h_2} \cdots dy^{h_p}$ は $(p-1)$-形式である．これより

$$\phi^*\omega = (\phi^* g)(\phi^* d\eta) = (\phi^* g) \wedge (d\phi^*\eta),$$

$$\therefore \quad d(\phi^*\omega) = d(\phi^* g) \wedge d(\phi^*\eta).$$

一方

$$d\omega = dg \wedge d\eta,$$

$$\therefore \quad \phi^* d\omega = (\phi^* dg) \wedge (\phi^* d\eta)$$

$$= d(\phi^* g) \wedge d(\phi^*\eta) = d\phi^*\omega.$$

よって帰納法が完成した．

最後に性質(iv)を見よう．$\mathsf{W}$ 上の 0-形式(函数) $h$ に対しては

$$[(\psi\circ\phi)^* h](\mathsf{x}) = h[(\psi\circ\phi)(\mathsf{x})] = h\{\psi[\phi(\mathsf{x})]\}$$

$$= [\psi^* h][\phi(\mathsf{x})] = \{\phi^*[\psi^* h]\}(\mathsf{x})$$

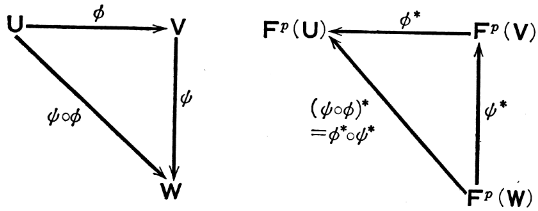
$$= [(\phi^*\circ\psi^*) h](\mathsf{x})$$

であるから，

$$(\psi\circ\phi)^*h=(\phi^*\circ\psi^*)h$$

を得る．後は上記と同様の帰納法で一般の場合が確定する．性質(iv)の意味する所は次のことに他ならない：

W 上の座標 $z^k$ を U 上の座標 $x^i$ で表わす式を直接に代入してもよいし，或いはまた間接的にまず V の座標 $y^j$ を通してから代入してもよい．結果は同一である．




この節で真に見られたことは，外微分形式に関する極めて明白な種類の計算を恐れなく実行してもよいということである．

**例** $E^1\to E^2$ なる写像 $\phi$: $t\to(x, y)$ を考える．それが $x=t^2$, $y=t^3$ で与えられていたとする．$\omega=x\,dy$ を $E^2$ 上の 1-形式とすれば

$$\phi^*\omega=(t^2)\frac{\partial y}{\partial t}dt=3t^4dt.$$

写像 $\psi$: $(x, y)\to t=x-y$ をとると

$$\psi^*(dt)=dx-dy.$$

最後に注意を一つ：$m<n$ とし，$\phi$ は $E^m$ の領域 U から，$E^n$ の領域 V の中への写像とする．$\omega$ が V 上の $p$-形式で，$p>m$ ならば，必然的に $\phi^*\omega=0$ となる．

## 3.4 座標変換

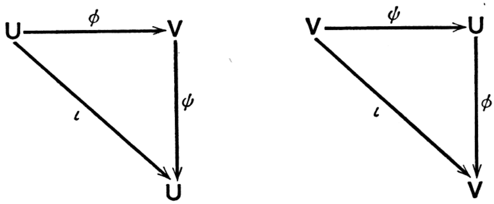
上の最後の節の結果を，U と V が共に $E^n$ の領域で，$\phi$ が U から V 上への 1 対 1 写像で，しかも $\phi$ も $\psi=\phi^{-1}$ も滑らかという特別の場合に適用する．(注意：$E^1\to E^1$ なる写像 $x\to y=x^3$ は 1 対 1 かつ滑らかだが，その逆写像 $y\to x=$

$y^{1/3}$ は滑らかではない——$y=0$ では微係数がない.) U 上でも V 上でも $\iota$ は恒等写像とする：$\iota(\mathsf{x})=\mathsf{x}$. すると $\phi^*$ は $\mathsf{F}^p(\mathsf{V})$ から $\mathsf{F}^p(\mathsf{U})$ 上への 1 対 1 写像で，その逆写像が $\psi^*$ になることがわかる. V の座標 y を U 上の新しい座標と解釈すれば，既述の

$$d\phi^*\omega = \phi^* d\omega$$

は，**外微分形式の外微分は，それを計算するのにとった座標系にはよらない**ことを意味している.

この外微分形式算の内的な首尾一貫性は極めて重要である. 後でこの場合を大域での理論(多様体上の微分式論)の基礎に使う.




ついでながら次の注意をする：この $d$ が座標系のとり方によらぬことは，正当な定式化をすれば，3.2 節の外微分を定義する四つの基本的性質(i-iv)からの帰結としても得られるのである.

## 3.5　力学からの例

次の問題は É. Goursat [15], 85 頁からとった. 座標 $(\mathsf{x}, \mathsf{u})=(x_1, \cdots, x_n, u_1, \cdots, u_n)$ をもつ領域で考える. 函数

$$\phi = \phi(\mathsf{x}, \mathsf{u})$$

が与えられていて，変数 u について 2 次の同次函数とする. (例えば運動エネルギー形式 $\sum a_{ij}(\mathsf{x})u_i u_j$.) そのとき

$$p_i = \frac{\partial \phi}{\partial u_i}$$

と定義する.

写像 $(\mathsf{x}, \mathsf{u})\to(\mathsf{x}, \mathsf{p})$ が正則な変数変換であると仮定する. そのとき

$$\phi(\mathsf{x}, \mathsf{u}) = \psi(\mathsf{x}, \mathsf{p})$$

と書く．問題は次の関係式を証明することである．

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial p_k} = u_k.$$

証明には二つのことを使う：一つは同次函数に関する Euler の公式であって，いまの場合には次のようになる：

$$\sum \frac{\partial \phi}{\partial u_k} u_k = 2\phi,$$

すなわち

$$\sum p_k u_k = 2\phi$$

である．もう一つは外微分を求めるにはどんな変数から導いてもよいという事実である．さて

$$d\phi = \sum \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx_i + \sum \frac{\partial \phi}{\partial u_k} du_k = \sum \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx_i + \sum p_k du_k$$

および

$$2d\phi = \sum p_k du_k + \sum u_k dp_k$$

とから，辺々減じて

$$d\phi = -\sum \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx_i + \sum u_k dp_k$$

を得る．さて求める関係式はすべて $\phi = \psi$ と

$$d\psi = \sum \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx_i + \sum \frac{\partial \psi}{\partial p_k} dp_k$$

とから出る．

## 3.6 Poincaré の補題の逆

Poincaré の補題 $d(d\omega) = 0$ を 3 次元空間で解釈すれば次のようになる(3.2 節の初めの例に従って)：

$$\mathrm{curl}(\mathrm{grad}\, f) = 0,$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{curl}\, \mathsf{v}) = 0.$$

ベクトル解析においては，回転が 0 なるベクトル場は，線積分によりあるスカラー場の勾配になり，また発散が 0 なるベクトル場は，通常は暴力的な方法により，あるベクトル場の回転になることが証明されている．さてもっと一般な結果を証明することにする：**$p$-形式 $\omega$ ($p\geqq 1$) が $d\omega=0$ ならば，($p-1$)-形式 $\alpha$ が存在して，$d\alpha=\omega$ となる**．$p>1$ ならば，解が沢山あるので，これはなかなか難しい結果である．またこの結果は，位相的にあまり複雑過ぎないような領域でしか成り立たないのである．

証明は，**柱体構成法**(cylinder construction)に基づく．まず $\mathsf{E}^n$ 中の領域 $\mathsf{U}$ から始める．$\mathsf{I}=[0,1]$ で $t$ 軸上の単位区間を表わし，**柱体**(cylinder)すなわち直積空間

$$\mathsf{I}\times\mathsf{U}$$

を考える．これは $0\leqq t\leqq 1$ かつ $\mathsf{x}$ が $\mathsf{U}$ 上を動くときの対 $(t,\mathsf{x})$ の全体からなる．

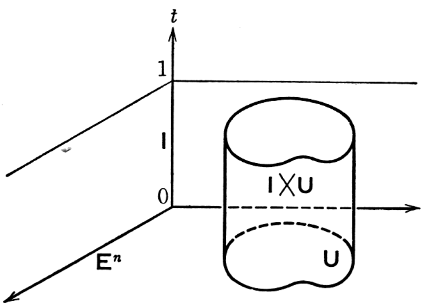
柱体の上面および底面を $\mathsf{U}$ と同一視させる二つの写像を抜き出す．すなわち

$$j_1:\ \mathsf{U}\to\mathsf{I}\times\mathsf{U},\qquad j_1(\mathsf{x})=(1,\mathsf{x}),$$
$$j_0:\ \mathsf{U}\to\mathsf{I}\times\mathsf{U},\qquad j_0(\mathsf{x})=(0,\mathsf{x}),$$

従って次の写像がひきおこされる：

$$j_i^*:\ \mathsf{F}^p(\mathsf{I}\times\mathsf{U})\to\mathsf{F}^p(\mathsf{U})\qquad(i=0,1).$$

例えば，$\mathsf{I}\times\mathsf{U}$ 上の微分形式 $\omega$ から $j_1^*\omega$ を作るには，$\omega$ 中に登場する $t$ をすべて 1 でおきかえ，$dt$ を 0 でおきかえさえすればよい．



さて新しい作用素 $K$ を作る：

$$K\colon \mathsf{F}^{p+1}(\mathsf{I}\times\mathsf{U}) \to \mathsf{F}^{p}(\mathsf{U}).$$

$K$ は単項式に対しては次の二つの式で定義する：

$$K(a(t,\mathsf{x})dx^{H}) = 0,$$

$$K(a(t,\mathsf{x})dtdx^{J}) = \left(\int_0^1 a(t,\mathsf{x})dt\right)dx^{J}.$$

一般の外微分形式に対しては，単項式にわけて，上の結果を加え合わせて，$K$ を定義する．（従って $K$ は線型である.）さて $K$ の次の性質は基本的である：

"$\mathsf{I}\times\mathsf{U}$ 上の任意の $(p+1)$-形式 $\omega$ に対して

$$K(d\omega)+d(K\omega) = j_1{}^*\omega - j_0{}^*\omega."$$

これは単項式について確かめればよい．

**場合 1**　$\omega = a(t,\mathsf{x})dx^{H}$.

$K\omega=0$ だから $dK\omega=0$ である．また

$$d\omega = \frac{\partial a}{\partial t}dtdx^{H} + (dt \text{ を含まぬ項})$$

だから

$$Kd\omega = \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t}dt\right)dx^{H} = [a(1,\mathsf{x})-a(0,\mathsf{x})]dx^{H}$$

となる．一方 $j_1{}^*\omega=a(1,\mathsf{x})dx^{H}$，$j_0{}^*\omega=a(0,\mathsf{x})dx^{H}$ だから成立がわかる．

**場合 2**　$\omega = a(t,\mathsf{x})dtdx^{J}$.

まず $j_1{}^*\omega=j_0{}^*\omega=0$ である．次に

$$Kd\omega = K\left[-\sum \frac{\partial a}{\partial x^i}dtdx^i dx^J\right]$$

$$= -\sum\left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x^i}dt\right)dx^i dx^J,$$

$$dK\omega = d\left[\left(\int_0^1 a(t,\mathsf{x})dt\right)dx^J\right]$$

$$= \sum \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\int_0^1 a(t,\mathsf{x})dt\right]dx^i dx^J$$

$$= \sum\left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x^i}dt\right)dx^i dx^J$$

であるから，この場合も成り立つ．

**定義** 領域 U が 1 点 $P$ に**変形可能**(deformable)とは，写像

$$\phi:\ \mathrm{I}\times\mathrm{U}\to\mathrm{U}$$

が存在して

$$\phi(1,\mathrm{x})=\mathrm{x},$$
$$\phi(0,\mathrm{x})=P$$

となることをいう．この境界条件は $j_i$ を用いていえば

$$\phi\circ j_1=\iota,\qquad \phi\circ j_0=P$$

となる．従って，U 上の $(p+1)$-形式 $\omega$ に対して

$$j_1{}^*[\phi^*\omega]=\omega,\qquad j_0{}^*[\phi^*\omega]=0$$

を得る．さて主要結果を述べそれを証明することができる：

**U は $\mathrm{E}^n$ 中の領域で，1 点 $P$ に変形可能とする．$\omega$ は U 上の $(p+1)$-形式で $d\omega=0$ とする．このとき U 上に $p$-形式 $\alpha$ が存在して**

$$\omega=d\alpha$$

**となる．**

証明は，上の公式で $\omega$ を $\phi^*\omega$ でおきかえるだけでよい．そのとき

$$K[d(\phi^*\omega)]+d[K(\phi^*\omega)]=\omega$$

となるが，$d(\phi^*\omega)=\phi^*(d\omega)=0$ であるから，$\alpha=K(\phi^*\omega)$ とおいて，$\omega=d\alpha$ を得る．

方程式 $d\alpha=\omega$ の解 $\alpha$ がどの程度に定まるかを見るのは興味がある．$\beta$ がもう一つの解ならば，$d\beta=\omega=d\alpha$ だから $d(\alpha-\beta)=0$ である．もし $p\geqq1$ なら再び主結果から，$\alpha-\beta$ は或る $(p-1)$-形式 $\lambda$ により $\alpha-\beta=d\lambda$ と書ける．換言すれば，一つの解 $\alpha$ が与えられたとき，一般解は $\alpha-d\lambda$ となる．ここで $\lambda$ は全く任意である．($p=0$ のときは，$\alpha$ と $\beta$ とは函数で，結論は $\alpha-\beta=$定数，となる.)

## 3.7 一つの例

以上の方法全体を $n=3$, $p=2$ の場合に説明する．そこで $\mathrm{E}^3$ 中に 2-形式

$$\omega = A\,dydz + B\,dzdx + C\,dxdy$$

をとり，$d\omega=0$ とする．すなわち

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0$$

である．さて $\mathsf{E}^3$ は次の写像により 0 に変形可能である：

$$\phi(t, x, y, z) = (tx, ty, tz).$$

主張は $\omega = d\alpha$，ただし

$$\alpha = K(\phi^*\omega)$$

である．まず $\phi^*\omega$ を計算する：

$$\begin{aligned}
\phi^*\omega &= A(tx, ty, tz)\,d(ty)\,d(tz) + \cdots \\
&= A(tx, ty, tz)(t\,dy + y\,dt)(t\,dz + z\,dt) + \cdots \\
&= A(tx, ty, tz)(yt\,dtdz - zt\,dtdy) + \cdots + (dt \text{ を含まぬ項}),
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\alpha = K(\phi^*\omega) &= \left(\int_0^1 A(tx, ty, tz)t\,dt\right)(y\,dz - z\,dy) \\
&\quad + \left(\int_0^1 B(tx, ty, tz)t\,dt\right)(z\,dx - x\,dz) \\
&\quad + \left(\int_0^1 C(tx, ty, tz)t\,dt\right)(x\,dy - y\,dx)
\end{aligned}$$

となる．少し計算すれば，実際 $d\alpha=\omega$ が確かめられる．

### 3.8 もう一つの注意

$$\omega = A\,dydz + B\,dzdx + C\,dxdy$$

に対して，

$$\alpha = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

を見出して

$$d\alpha = \omega$$

ならしめるという問題は，3 変数 $x, y, z$ の三つの未知函数 $P, Q, R$ を見出し

て，次の三つの連立偏微分方程式が満たされるようにするということである．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z}=A, \\ \dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x}=B, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=C. \end{cases}$$

ただし与えられた函数 $A, B, C$ は次の必要条件

$$\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}=0$$

を満たしているものとする．著しいことは，この連立偏微分方程式が(そして 3.6 節で扱ったもっと一般なのも)積分を含む具体的な公式で解けるということである．一般に外微分形式の理論は，連立常微分方程式に帰着するような連立偏微分方程式の多くの型(そしてそれはしばしば積分で解けるのだが)を，暴露するのである．

もう一つの注意すべき点は次のことである．$d\omega=0$ なる $(p+1)$-形式 $\omega$ を扱っているとき，たまたま $\omega$ が若干個のパラメーター(媒介変数)を滑らかに含んでいるならば，$d\alpha=\omega$ なる $\alpha$ で，しかも同じパラメーターをちょうど同じ滑らかさで含んでいるものを見出すことができる．これはやはり 3.6 節の具体的公式から出る．

## 3.9 問　　題

**1.**

$$\omega=\frac{1}{2}\sum a_{ij}\,dx^i dx^j, \qquad a_{ij}+a_{ji}=0$$

とするとき，次を証明せよ．

$$d\omega=\frac{1}{6}\sum\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j}\right)dx^i dx^j dx^k.$$

**2.** 1 次変換 $\phi$: $\mathrm{E}^n\to\mathrm{E}^n$, $\phi(x^1, \cdots, x^n)=(y^1, \cdots, y^n)$ が

$$y^i=\sum a^i{}_j\,x^j+b^i \qquad (a^i{}_j, b^i \text{ は定数})$$

であるとき，$\phi^*(dx^1 \cdots dx^n)$ は何か？

**3.** $\mathsf{E}^2$ から $\mathsf{E}^2$ の中への写像

$$\phi: (x, y) \to (xy, 1)$$

を考え，$\phi^*(dx)$, $\phi^*(dy)$, $\phi^*(y\,dx)$ を計算せよ．

**4.** 3.7 節の未完了の計算を完成せよ．

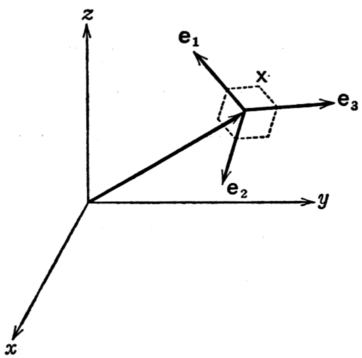
# 第IV章　応　　用

## 4.1　$\mathsf{E}^3$ 中の動基底

まず Euclid 空間のベクトルを取り扱うに当って，図をわかり易く綺麗にするためにベクトルを種々の場所へ移すことがあるが，どんな始点のベクトルも，それを解析的に取り扱うときは必ず原点から出ているものとして扱うことを注意しておく．

$\mathsf{E}^3$ の各点 $\mathsf{x}$ ごとに，右手正規直交系 $\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_3$ をとりつけ，どのベクトル場 $\mathsf{e}_i$ も滑らかと仮定する．

これからすることは，目にうつるものは何でも $\mathsf{e}_i$ 達を用いて表わし，そうして得られた式に外微分 $d$ を適用して新しい式を導く．このようにして続けて行き，もう新しい式が得られなくなるまでやるのである．




まず第一に，$d\mathsf{x}$ は 1-形式を成分にもつベクトルである．例えば，$d\mathsf{x}=(dx, dy, dz)=dx\mathsf{i}+dy\mathsf{j}+dz\mathsf{k}$ である．$d\mathsf{x}$ を点 $\mathsf{x}$ における基底 $\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_3$ で表わそう．(これは確かにできる．例えばまず $\mathsf{i}, \mathsf{j}, \mathsf{k}$ を $\mathsf{e}_i$ 達について展開し，それを上式に代入し，$\mathsf{e}_i$ 達について整頓すればよい.) すると次のような式が得られる．

$$d\mathsf{x} = \sigma_1\mathsf{e}_1+\sigma_2\mathsf{e}_2+\sigma_3\mathsf{e}_3.$$

ただしここで $\sigma_i$ 達は 1-形式である．同じことを各 $\mathbf{e}_i$ について行なえば

$$d\mathbf{e}_i = \omega_{i1}\mathbf{e}_1+\omega_{i2}\mathbf{e}_2+\omega_{i3}\mathbf{e}_3 \qquad (i=1, 2, 3)$$

となる．$\omega_{ij}$ 達は 1-形式である．

さて $\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_k=\delta_{ik}$ であるから ($\delta_{ik}$ は Kronecker の記号：$\delta_{ii}=1$, $\delta_{ik}=0$ $(k\neq i)$)

$$d\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_k+\mathbf{e}_i\cdot d\mathbf{e}_k = 0,$$

すなわち

$$\omega_{ik}+\omega_{ki} = 0$$

を得る．特に，$\omega_{ii}=0$ である．

次に，便宜上若干の行列の記号を導入する：

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}, \qquad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \qquad \Omega = \|\omega_{ij}\|$$

とおく．すると次のような構造方程式が得られる．

$$d\mathbf{x} = \sigma\mathbf{e},$$
$$d\mathbf{e} = \Omega\mathbf{e},$$
$$\Omega+{}^t\Omega = 0.$$

ただしここで行列に $d$ を適用するという意味は，単にその各成分に $d$ を適用するということである．また上の最後の等式の左辺にある上つき添字 $t$ は，**転置行列**を表わす．すなわち行と列を交換することを意味する．従ってこの等式は，行列 $\Omega$ が歪対称であることを表わしている．

さて $d(d\mathbf{x})=0$ であるから，次の等式が得られる：

$$d\sigma\mathbf{e}-\sigma d\mathbf{e} = 0,$$
$$\therefore \quad d\sigma\mathbf{e}-\sigma\Omega\mathbf{e} = 0,$$
$$\therefore \quad (d\sigma-\sigma\Omega)\mathbf{e} = 0.$$

ここで $\mathbf{e}_i$ 達の 1 次独立性を用いて，

$$d\sigma = \sigma\Omega$$

を得る．同様に $d(d\mathbf{e})=0$ から次式を得る．

$$0 = d\Omega\mathbf{e}-\Omega d\mathbf{e} = (d\Omega-\Omega^2)\mathbf{e},$$
$$\therefore \quad d\Omega = \Omega^2.$$

以上をまとめて次の等式達が得られる．

**構造方程式** **積分可能条件**

$$\left\{\begin{aligned} d\mathrm{x} &= \sigma\mathrm{e} \\ d\mathrm{e} &= \Omega\mathrm{e} \\ \Omega + {}^t\Omega &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left\{\begin{aligned} d\sigma &= \sigma\Omega \\ d\Omega &= \Omega^2 \end{aligned}\right\}$$

これらに更に外微分を適用しても新しい結果はもはや生じないのである．後述の Riemann 幾何学でわかるように，等式 $d\Omega-\Omega^2=0$ は，Euclid 空間の曲率が 0 であることを表わしている．

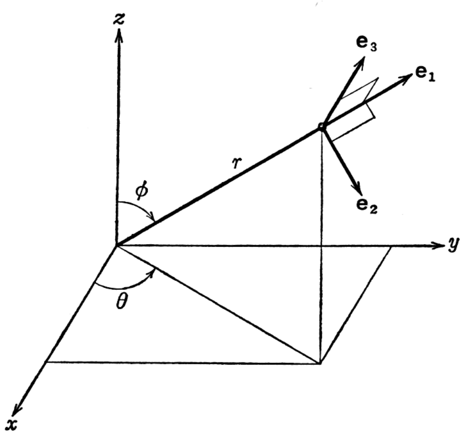
注意に値することを一つ：3-形式 $\sigma_1\wedge\sigma_2\wedge\sigma_3$ は正に $E^3$ 中の体積要素に他ならない：

$$\sigma_1\wedge\sigma_2\wedge\sigma_3 = dxdydz.$$

これの検証は次節で行なう．

この節の計算が，$E^n$ においても全く同様に成り立つことは直ちに認められるであろう．

**例** 球座標．正規直交系の単位ベクトル $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3$ をそれぞれ $r, \phi, \theta$ の増加する方向にとる．




すると

$$\mathrm{x} = (r\sin\phi\cos\theta,\ r\sin\phi\sin\theta,\ r\cos\phi)$$

より次式を得る：

$$\begin{aligned} d\mathrm{x} &= (\sin\phi\cos\theta,\ \sin\phi\sin\theta,\ \cos\phi)\,dr \\ &\quad +(r\cos\phi\cos\theta,\ r\cos\phi\sin\theta,\ -r\sin\phi)\,d\phi \\ &\quad +(-r\sin\phi\sin\theta,\ r\sin\phi\cos\theta,\ 0)\,d\theta \\ &= (dr)\,\mathrm{e}_1+(r\,d\phi)\,\mathrm{e}_2+(r\sin\phi\,d\theta)\,\mathrm{e}_3. \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{cases} \mathrm{e}_1 = (\sin\phi\cos\theta,\ \sin\phi\sin\theta,\ \cos\phi), \\ \mathrm{e}_2 = (\cos\phi\cos\theta,\ \cos\phi\sin\theta,\ -\sin\phi), \\ \mathrm{e}_3 = (-\sin\theta,\ \cos\theta,\ 0) \end{cases}$$

である．従って

$$\sigma_1 = dr, \qquad \sigma_2 = r\,d\phi, \qquad \sigma_3 = r\sin\phi\,d\theta.$$

微分して次式を得る．

$$\begin{aligned} d\mathrm{e}_1 &= (d\phi)\,\mathrm{e}_2+(\sin\phi\,d\theta)\,\mathrm{e}_3, \\ d\mathrm{e}_2 &= (-d\phi)\,\mathrm{e}_1+(\cos\phi\,d\theta)\,\mathrm{e}_3. \end{aligned}$$

従って，$\Omega$ の歪対称性により，次式を得る．

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & d\phi & \sin\phi\,d\theta \\ -d\phi & 0 & \cos\phi\,d\theta \\ -\sin\phi\,d\theta & -\cos\phi\,d\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

体積要素は次の通り：

$$\sigma_1\wedge\sigma_2\wedge\sigma_3 = r^2\sin\phi\,drd\phi d\theta.$$

## 4.2 直交行列と歪対称行列の間の関係

$\Omega$ が歪対称となったのは偶然ではない．これは，直交変換の第1近似が歪対称変換であるという原理からの帰結なのである．このことをいくつかの見地から考察してみよう．

行列 $B$ が直交行列であるとは，その転置行列が逆行列に等しいことをいう：${}^tB=B^{-1}$．すなわち $B\,{}^tB={}^tBB=I$ のときである．いま $A$ を歪対称とする：$A+{}^tA=0$．すると，微小な $\varepsilon$ に対して，$B=I+\varepsilon A$ とおくと

$$B\,{}^tB = (I+\varepsilon A)(I-\varepsilon A) = I+O(\varepsilon^2)$$

となる．従って，$B$ は第1次の項までとれば，直交行列になる．

次のは別のやり方である．$A$ を歪対称行列とする．$A$ の固有値は純虚数であるから，$I+A$, $I-A$ の行列式は0ではない．そこで

$$B=\frac{I+A}{I-A}$$

とおくと，

$$B\,{}^tB=\left(\frac{I+A}{I-A}\right)\left(\frac{I-A}{I+A}\right)=I$$

となる．従って $B$ は直交行列である．

次に前節の計算をもう一度調べてみよう．

$$\mathrm{i}=\begin{pmatrix}\mathrm{i}_1\\ \mathrm{i}_2\\ \mathrm{i}_3\end{pmatrix}$$

とおく．ここで $\mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \mathrm{i}_3$ は，それぞれ $x, y, z$ 方向に固定した単位ベクトル(通常のベクトル記法で i, j, k と書かれているもの)である．すると

$$\mathrm{e}_i=\sum b_{ij}\mathrm{i}_j,\quad \text{すなわち}\quad \mathrm{e}=B\mathrm{i}$$

とおいて，行列 $B=\|b_{ij}\|$ が得られる．$B$ は明らかに直交行列である：

$$I=\mathrm{e}\,{}^t\mathrm{e}=B\mathrm{i}\,{}^t\mathrm{i}\,{}^tB=BI\,{}^tB=B\,{}^tB.$$

(さてここで，前節の終りで述べた事実 $dxdydz=\sigma_1\wedge\sigma_2\wedge\sigma_3$ を証明することができる：

$$d\mathrm{x}=(dx, dy, dz)\mathrm{i}=\sigma\mathrm{e}=\sigma B\mathrm{i},$$

$$\therefore\quad (dx, dy, dz)=\sigma B$$

であるから，

$$dxdydz=|B|\sigma_1\wedge\sigma_2\wedge\sigma_3$$

となる．ところが，${}^tBB=I$ から $|B|^2=1$, 従って $|B|=\pm1$ が得られる．e は右手系と仮定しているから $|B|=1$ で，

$$dxdydz=\sigma_1\wedge\sigma_2\wedge\sigma_3$$

となる.)

次に，

$$de = dB\mathrm{i} = (dB)B^{-1}e$$

であるから，次式が得られる：

$$\Omega = (dB)B^{-1}.$$

もっと一般に次の事が成り立つのを注意しておこう．**$A$ が任意個数の変数の函数を成分とする直交行列ならば**

$$(dA)A^{-1}$$

**は 1-形式を成分とする歪対称行列である．**

何故ならば，${}^tAA=I$ を微分して

$$({}^tdA)A+{}^tA(dA) = 0,$$
$$\therefore \quad {}^tA^{-1}({}^tdA)+(dA)A^{-1} = 0,$$
$$\therefore \quad {}^t((dA)A^{-1})+(dA)A^{-1} = 0.$$

逆の命題も成り立つ．それは重要である：**行列 $A$ の成分は，領域 U 上で定義された函数とする．$A$ は U の或る 1 点で直交行列とし，しかも U 上で**

$$dA = \Lambda A$$

**を満たすとする．ただしここで，$\Lambda$ は 1-形式を成分とする歪対称行列とする．すると $A$ は U 上至る所で直交行列である．**

$C={}^tAA$ とおくと

$$dC = ({}^tdA)A+{}^tA(dA) = (-{}^tA\Lambda)A+{}^tA(\Lambda A) = 0$$

となる．よって，$C$ は U 上で定数行列である．ところが U の或る 1 点では $C=I$ となると仮定しているから，U 上で $C=I$，すなわち U 上で ${}^tAA=I$，すなわち U 上で $A$ は直交行列となる．

もう一つの見地は次の通り：$A$ が函数行列でしかも直交行列(直交変換)とする．空間の各点 $\mathrm{v}_0$ は一般値で考えた $A$ により

$$\mathrm{v} = A\mathrm{v}_0$$

に移される．よって

$$d\mathrm{v} = dA\mathrm{v}_0 = (dA)A^{-1}\mathrm{v}$$

を得る．従って，考えている行列系の中の一般の元 $A$ の作用の下での，$\mathrm{v}$ から**無限に近い**ベクトル $\mathrm{v}+d\mathrm{v}$ への移行は次式によって与えられる．

$$\mathsf{v} \to \mathsf{v}+d\mathsf{v} = [I+(dA)A^{-1}]\mathsf{v}.$$

ここで，歪対称行列 $(dA)A^{-1}$ が，この**無限小変換**を表わしているのである．

以上のすべての考察は $\mathsf{E}^n$ でも同様に成り立つ．

## 4.3 基底達のなす6次元空間

$\mathsf{E}^3$ の**すべての**点 x において，右手正規直交系 $\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2, \mathsf{E}_3$ の**全体**を考え，これらの全体からなる空間を考察する．この空間は6次元である．何故ならば，x をえらぶのに3個の自由度があり，単位ベクトル $\mathsf{E}_1$ をえらぶのに2個の自由度があり，次に $\mathsf{E}_1$ に垂直な単位ベクトル $\mathsf{E}_2$ をえらぶのに1個の自由度がある．そしてそれで $\mathsf{E}_3$ は決定されてしまうからである．

$$\mathsf{E} = \begin{pmatrix} \mathsf{E}_1 \\ \mathsf{E}_2 \\ \mathsf{E}_3 \end{pmatrix}$$

と書くと，

$$\mathsf{E} = A\mathsf{e}$$

となる．ただしここで，直交行列 $A$ はパラメーター3個を含む函数行列で，$\mathsf{e}=\mathsf{e}(\mathsf{x})$ はあらかじめ与えられた動基底とする．

すると

$$d\mathsf{x} = \sigma\mathsf{e} = \sigma A^{-1}\mathsf{E},$$

$$d\mathsf{E} = (dA)\mathsf{e}+A\,d\mathsf{e} = [dA+A\Omega]\mathsf{e}$$

$$= [dA+A\Omega]A^{-1}\mathsf{E}$$

となる．

$$\tilde{\sigma} = \sigma A^{-1}, \qquad \tilde{\Omega} = (dA)A^{-1}+A\Omega A^{-1}$$

とおくと，これらの行列の成分は，基底のなす6次元空間上の 1-形式である．そして次の関係式が得られる：

**構造方程式**　　**積分可能条件**

$$\begin{Bmatrix} d\mathsf{x} = \tilde{\sigma}\mathsf{E} \\ d\mathsf{E} = \tilde{\Omega}\mathsf{E} \\ \tilde{\Omega}+{}^t\tilde{\Omega} = 0 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} d\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}\tilde{\Omega} \\ d\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}^2 \end{Bmatrix}$$

積分可能条件を検証するには，次のことに注意すればよい：

$$0=d(d\mathsf{x})=d\tilde{\sigma}\mathsf{E}-\tilde{\sigma}d\mathsf{E}=(d\tilde{\sigma}-\tilde{\sigma}\tilde{\Omega})\mathsf{E}, \qquad \therefore \quad d\tilde{\sigma}=\tilde{\sigma}\tilde{\Omega}$$

等々である．

$\mathsf{E}^3$ の微分幾何学を深く研究しようとすれば，人は必然的にこの基底のなす6次元空間とその微分形式 $\tilde{\sigma}^i$, $\tilde{\omega}_{ij}$ 達に導かれるのである．これらの微分形式は，$\mathsf{E}^3$ 上の動基底 e のえらび方には全く無関係であることが後から注意されるであろう．

## 4.4 ラプラシアン．直交曲線座標系

4.1節および4.2節の考察を続行する．微分形式 $dx, dy, dz$ は，各点における 1-形式の空間の Euclid 幾何学に対して，正規直交系をなす．これらは固定座標系(絶対座標系) i と次のように関連している：

$$\mathsf{e}=B\mathsf{i}, \qquad d\mathsf{x}=\sigma\mathsf{e}=(dx, dy, dz)\mathsf{i}$$

により，次式を得る(これは前にもすでに注意した)．

$$\sigma B=(dx, dy, dz).$$

$B$ が直交行列であるから，$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ は“各点において1-形式のなす空間の正規直交系である”ことがわかる．

$f$ を $\mathsf{E}^3$ 上の函数とすると，

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

$$*df=\frac{\partial f}{\partial x}dydz+\frac{\partial f}{\partial y}dzdx+\frac{\partial f}{\partial z}dxdy,$$

$$d*df=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)dxdydz=(\Delta f)\,dxdydz.$$

かくして，3-形式 $d*df$ が，体積要素 $dxdydz$ に $f$ のラプラシアン $\Delta f$ を掛けたものに等しいことがわかったから，$d*df$ が得られさえすれば，$\Delta f$ も得られることになる．

さて，星印作用素 $*$ は如何なる正規直交系で計算してもよいことは既に知っている．また $\sigma_1\wedge\sigma_2\wedge\sigma_3=dxdydz$ であるから，次のような手続きでやればよ

い．まず $df$ を $\sigma_i$ 達を用いて表わす：

$$df = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3.$$

すると

$$*df = a_1\sigma_2\sigma_3 + a_2\sigma_3\sigma_1 + a_3\sigma_1\sigma_2$$

となるから

$$d*df = (\Delta f)\sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

を得る．

$\mathbf{E}^3$ 中の領域の座標系（曲線座標系）が**直交曲線座標系**であるとは，

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial w}$$

なるベクトル達が互いに直交することをいう．これは適当な函数 $\lambda, \mu, \nu$ をとれば，

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\nu}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial w}$$

が正規直交系，すなわち動基底をなすことを意味している．これが右手系であると前もって仮定しよう．（そうでないなら，$w$ と $v$ とを交換しさえすればよい．）すると

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= du\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} + dv\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} + dw\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial w} \\ &= (\lambda\, du)\mathbf{e}_1 + (\mu\, dv)\mathbf{e}_2 + (\nu\, dw)\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

であるから，

$$\sigma_1 = \lambda\, du, \quad \sigma_2 = \mu\, dv, \quad \sigma_3 = \nu\, dw$$

が 1-形式に対する正規直交系をなす．さてそこでラプラシアンを計算しよう．

$$\begin{aligned} df &= f_u du + f_v dv + f_w dw \\ &= \left(\frac{f_u}{\lambda}\right)\sigma_1 + \left(\frac{f_v}{\mu}\right)\sigma_2 + \left(\frac{f_w}{\nu}\right)\sigma_3, \\ *df &= \left(\frac{f_u}{\lambda}\right)\sigma_2\sigma_3 + \left(\frac{f_v}{\mu}\right)\sigma_3\sigma_1 + \left(\frac{f_w}{\nu}\right)\sigma_1\sigma_2 \\ &= \left(\frac{\mu\nu f_u}{\lambda}\right)dv\,dw + \left(\frac{\lambda\nu f_v}{\mu}\right)dw\,du + \left(\frac{\lambda\mu f_w}{\nu}\right)du\,dv. \end{aligned}$$

この式と

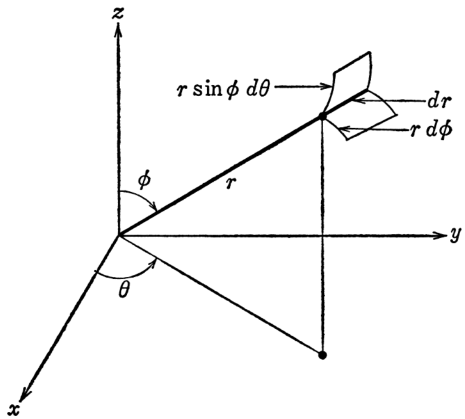
$$d*df = (\Delta f)\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \lambda\mu\nu(\Delta f)\,dudvdw$$

とを比較すれば，次式を得る.

$$\Delta f = \frac{1}{\lambda\mu\nu}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mu\nu}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\lambda\nu}{\mu}\frac{\partial f}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\lambda\mu}{\nu}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right].$$

これを球座標 $r, \phi, \theta$ に適用しよう：

$$\begin{cases} x = r\sin\phi\cos\theta, \\ y = r\sin\phi\sin\theta, \\ z = r\cos\phi. \end{cases}$$




$r, \phi, \theta$ の直交性は容易に検証される.（幾何学的には明らかである.）そして次式を得る.

$$\sigma_1 = dr, \qquad \sigma_2 = r\,d\phi, \qquad \sigma_3 = r\sin\phi\,d\theta.$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2\sin\phi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\phi\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)\right].$$

## 4.5 曲 面

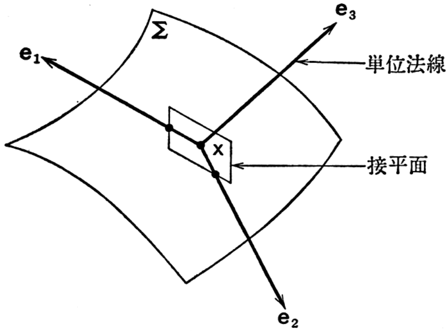
$\mathbf{E}^3$ 中の滑らかな曲面 $\Sigma$ を考えよう．$\Sigma$ の各点 $\mathbf{x}$ で動基底 $\mathbf{e}$ をえらんで，$\mathbf{e}_3$ が $\Sigma$ の法線になっているようにする．すると $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ は各点で接平面を張る.

4.1 節の方程式が如何に特殊化されるかを見よう.

$\mathrm{x}$ は曲面上を動くように束縛されているから，$d\mathrm{x}$ は接平面 $\sigma_3=0$ 中になければならぬ:

$$d\mathrm{x}=\sigma_1\mathrm{e}_1+\sigma_2\mathrm{e}_2.$$

2-形式 $\sigma_1\sigma_2$ が，$\Sigma$ の面積要素を表わすのは明らかである.




$\Omega$ の歪対称性を利用して

$$\Omega=\begin{pmatrix}0 & \varpi & -\omega_1\\ -\varpi & 0 & -\omega_2\\ \omega_1 & \omega_2 & 0\end{pmatrix}$$

と書く．すると構造方程式と積分可能条件とは次のようになる.

**構造方程式**

$$\begin{cases} d\mathrm{x}=\sigma_1\mathrm{e}_1+\sigma_2\mathrm{e}_2\\ d\mathrm{e}_1=\varpi\mathrm{e}_2-\omega_1\mathrm{e}_3\\ d\mathrm{e}_2=-\varpi\mathrm{e}_1-\omega_2\mathrm{e}_3\\ d\mathrm{e}_3=\omega_1\mathrm{e}_1+\omega_2\mathrm{e}_2\end{cases}$$

**積分可能条件**

$$\begin{cases} d\sigma_1=\varpi\sigma_2\\ d\sigma_2=-\varpi\sigma_1\\ \sigma_1\omega_1+\sigma_2\omega_2=0\\ d\varpi+\omega_1\omega_2=0\\ d\omega_1=\varpi\omega_2\\ d\omega_2=-\varpi\omega_1\end{cases}$$

或る意味で，局所的な曲面論の一切はこれらの等式の中に含まれているのである．残っていることは，これらを曲率や曲面上の曲線等々の言葉で解釈することである．それを少々説明しよう.

すでに注意したように，$\sigma_1\sigma_2$ は $\Sigma$ 上の面積要素である．$\mathrm{x}$ が $\Sigma$ 上を動くに

つれて，$\mathbf{e}_3$ は単位球面 $S^2$ 上のある領域上を動く．この領域を $\Sigma$ の**法線写像**(normal image)または**球面写像**(spherical image)または**球面表示**という．$\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{e}_2$ とは $\mathbf{e}_3$ に直交するから，球面写像の接平面上にあり，その接平面の基底をなしている．等式 $d\mathbf{e}_3=\omega_1\mathbf{e}_1+\omega_2\mathbf{e}_2$ は球面写像に対して，$d\mathbf{x}=\sigma_1\mathbf{e}_1+\sigma_2\mathbf{e}_2$ が $\Sigma$ に対して果すのと同じ役割を果すことがわかる．従って，$\omega_1\omega_2$ は球面写像の面積要素を表わす．

2 次元空間 $\Sigma$ 上には 1 次独立な 2-形式はただ一つしかないから，

$$\omega_1\omega_2 = K\sigma_1\sigma_2$$

と書ける．ここで $K$ は **Gauss 曲率**(Gaussian curvature)と呼ばれるスカラーである．すぐ後で，$K$ は $\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{e}_2$ のえらび方に全く無関係なことがわかる．

同様に，$\sigma_1\omega_2-\sigma_2\omega_1$ は $\Sigma$ 上の 2-形式であるから，

$$\sigma_1\omega_2-\sigma_2\omega_1 = 2H\sigma_1\sigma_2$$

と書ける．これによって定義されるスカラー $H$ は $\Sigma$ の**平均曲率**(mean curvature)と呼ばれる．

1-形式 $\omega_1, \omega_2$ は $\sigma_1, \sigma_2$ の 1 次結合である．関係式

$$\sigma_1\omega_1+\sigma_2\omega_2 = 0$$

により，係数間の対称性を得る：

$$\omega_1 = p\sigma_1+q\sigma_2,$$
$$\omega_2 = q\sigma_1+r\sigma_2.$$

これから容易に

$$2H = p+r, \qquad K = pr-q^2$$

を得る．対称行列

$$\begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}$$

の固有値 $\kappa_1, \kappa_2$ を $\Sigma$ の**主曲率**(principal curvature)という．従って次式が得られる．

$$2H = \kappa_1+\kappa_2, \qquad K = \kappa_1\kappa_2.$$

関係式 $d\varpi+\omega_1\omega_2=0$ から

$$d\varpi + K\sigma_1\sigma_2 = 0$$

が得られる．これにより，$\sigma_1, \sigma_2$ と $\varpi$ が知られさえすれば $K$ が得られる．ところが関係式

$$d\sigma_1 = \varpi\sigma_2, \quad d\sigma_2 = -\varpi\sigma_1$$

があるから，$\varpi$ を定めるには，$\sigma_1$ と $\sigma_2$ さえ与えられれば十分である．(何故ならば，そのとき $d\sigma_1 = a\sigma_1\sigma_2$ と $d\sigma_2 = b\sigma_1\sigma_2$ が定まり，$\varpi = a\sigma_1 + b\sigma_2$ が成り立たねばならないから，$\varpi$ を得る.) かくして，以上をまとめれば，**$K$ は $\sigma_1$ と $\sigma_2$ とから完全に解析的に定まる**．これは Gauss の定理：曲率 $K$ は曲面 $\Sigma$ の内的な不変量であって，$\Sigma$ の点の間の，$\Sigma$ に沿って測った距離，すなわち，測地線(最短路)に沿って測った距離が局所的に保存される限りは，$\Sigma$ がどのように $E^3$ 中に埋め込まれているかには無関係である——を含んでいる．

微分形式を成分や係数にもつベクトルに対して，ベクトルの演算を適用するときには，つねに，成分や係数を外積代数の規則に従って結合しなければならない．そして因子の順序について厳しい注意を払わねばならない．このことを念頭において，ベクトル積(外積)を作ってみる：

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} \times d\mathbf{x} &= (\sigma_1\mathbf{e}_1 + \sigma_2\mathbf{e}_2) \times (\sigma_1\mathbf{e}_1 + \sigma_2\mathbf{e}_2) \\ &= \sigma_1^2(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1) + \sigma_2^2(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2) + \sigma_1\sigma_2(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) + \sigma_2\sigma_1(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1). \end{aligned}$$

さて $\sigma_1^2 = 0$ (そして $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = 0$) 等々であり，また

$$\begin{aligned} \sigma_2\sigma_1(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1) &= (-\sigma_1\sigma_2)(-\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \\ &= (\sigma_1\sigma_2)\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

であるから，結局

$$d\mathbf{x} \times d\mathbf{x} = 2(\sigma_1\sigma_2)\mathbf{e}_3$$

となる．かくして**面積要素ベクトル** (vectorial area element) が得られた．詳しくいえば，

$$(\sigma_1\sigma_2)\mathbf{e}_3$$

を面積要素ベクトルという．それは法線方向のベクトルで，大きさは $\sigma_1\sigma_2$ すなわち $\Sigma$ の面積要素である．

$$d\mathbf{x} \times d\mathbf{x} = (dx, dy, dz) \times (dx, dy, dz)$$

$$= 2(dydz,\ dzdx,\ dxdy)$$

であるから，

$$(dydz,\ dzdx,\ dxdy) = (\sigma_1\sigma_2)\mathbf{e}_3$$

を得る．

$\mathbf{v}=(P, Q, R)$ がベクトル場ならば，

$$\int_\Sigma (P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy) = \int \mathbf{v}\cdot(\sigma_1\sigma_2)\mathbf{e}_3$$

$$= \int_\Sigma (\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_3)(\sigma_1\sigma_2)$$

は，ベクトル場 $\mathbf{v}$ の曲面 $\Sigma$ を通る**流量**(flux) である．

同様にして次の諸式が得られる．

$$d\mathbf{x}\times d\mathbf{x} = 2(\sigma_1\sigma_2)\mathbf{e}_3,$$

$$d\mathbf{x}\times d\mathbf{e}_3 = 2H(\sigma_1\sigma_2)\mathbf{e}_3,$$

$$d\mathbf{e}_3\times d\mathbf{e}_3 = 2K(\sigma_1\sigma_2)\mathbf{e}_3.$$

これは，$H$ と $K$ とが接ベクトル $\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{e}_2$ とに無関係なことを示している．

$f$ が $\Sigma$ 上の函数で

$$df = a_1\sigma_1+a_2\sigma_2$$

ならば，$\Sigma$ 上で

$$*df = -a_2\sigma_1+a_1\sigma_2,$$

$$d*df = d(-a_2\sigma_1+a_1\sigma_2) = (\Delta f)\sigma_1\sigma_2$$

により，$f$ の**曲面上のラプラシアン，或いは第2ベルトラミ作用素** $\Delta$ が定義される．

同様なことがベクトルについても成り立ち，次式を得る：

$$d\mathbf{x} = \sigma_1\mathbf{e}_1+\sigma_2\mathbf{e}_2,$$

$$*d\mathbf{x} = \sigma_2\mathbf{e}_1-\sigma_1\mathbf{e}_2.$$

次式に注意しよう：

$$d\mathbf{x}\times\mathbf{e}_3 = (\sigma_1\mathbf{e}_1+\sigma_2\mathbf{e}_2)\times\mathbf{e}_3$$

$$= \sigma_2\mathbf{e}_1-\sigma_1\mathbf{e}_2.$$

従って

$$*\,d\mathsf{x} = d\mathsf{x}\times\mathsf{e}_3,$$

$$\therefore\quad d*d\mathsf{x} = -d\mathsf{x}\times d\mathsf{e}_3 = -2H(\sigma_1\sigma_2)\mathsf{e}_3.$$

従って次式を得る.

$$\Delta\mathsf{x} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = -2H\mathsf{e}_3.$$

**極小曲面**(minimal surface)(すなわち面積が停滞値をもつ曲面)とは, 平均曲率 $H$ が 0 であるような曲面をいう. すると上記により次のことが証明されたわけである: **どの極小曲面上でも座標函数 $x, y, z$ は調和函数である**. すなわち $\Delta x=\Delta y=\Delta z=0$ を満足する.

この節では, 外微分算が如何に曲面の古典的な微分幾何学に適合するかということの一つの見本を述べたのであるが, これ以上の材料については 8.1 節と 8.2 節で述べる. しかし本書では扱えぬような主題も沢山ある. 全く満足し切れるわけでもなく, また不幸にもしばしば悪趣味な歴史的注釈で潤色された所の, この外微分算的な見地からの取扱いが Blaschke [3] に見出される.

## 4.6 Maxwell の場の方程式

古典的な電磁場の理論では次の量が取り扱われる.

E＝電　　界,　　H＝磁　　界,

B＝磁束密度,　　J＝電流の密度,

D＝電気変位,　　$\rho$＝電荷密度.

これらはすべて空間変数 $x^1, x^2, x^3$ と時間 $t$ の函数である. 通常のベクトルの用語で基本的な Maxwell の方程式を述べれば次のようになる.

(i) $\operatorname{curl}\mathsf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathsf{B}}{\partial t}$ (Faraday の誘導法則).

(ii) $\operatorname{curl}\mathsf{H} = \dfrac{4\pi}{c}\mathsf{J} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathsf{D}}{\partial t}$ (Ampère の法則).

(iii) $\operatorname{div}\mathsf{D} = 4\pi\rho$ (連続性).

(iv) $\operatorname{div}\mathsf{B} = 0$ (真の磁荷の非存在).

ここで $c$ は光速度である. これらの方程式を外微分形式の言葉で述べよう. そのために, 次のようにおく.

$$\alpha = (E_1dx^1+E_2dx^2+E_3dx^3)(c\,dt)$$
$$\quad +(B_1dx^2dx^3+B_2dx^3dx^1+B_3dx^1dx^2),$$
$$\beta = -(H_1dx^1+H_2dx^2+H_3dx^3)(c\,dt)$$
$$\quad +(D_1dx^2dx^3+D_2dx^3dx^1+D_3dx^1dx^2),$$
$$\gamma = (J_1dx^2dx^3+J_2dx^3dx^1+J_3dx^1dx^2)\,dt-\rho\,dx^1dx^2dx^3.$$

すると方程式(i)と(iv)は

$$d\alpha = 0$$

となる．方程式(ii)と(iii)は

$$d\beta+4\pi\gamma = 0$$

となる．最後の方程式に $d$ を適用して

$$d\gamma = 0$$

を得る．これをベクトル記号で書けば

$$\mathrm{div}\ \mathsf{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

である．方程式 $d\alpha=0$ から次のことが結論される：1点に収縮できるような時空内の任意の領域においては少なくとも，1-形式 $\lambda$ が存在して

$$d\lambda = \alpha$$

となる．**ベクトル・ポテンシャル** $\mathsf{A}$ とスカラー $A_0$ とを

$$\lambda = A_1dx^1+A_2dx^2+A_3dx^3+A_0c\,dt$$

と書くことにより導入する．すると $d\lambda=\alpha$ なる等式をベクトルの形で書けば，次のようになる．

$$\begin{cases} \mathrm{curl}\,\mathsf{A} = \mathsf{B}, \\ \mathrm{grad}\,A_0-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathsf{A}}{\partial t} = \mathsf{E}. \end{cases}$$

**自由空間**すなわち**真空状態**(free space)では

$$\mathsf{E} = \mathsf{D},\qquad \mathsf{H} = \mathsf{B},$$
$$\mathsf{J} = 0,\qquad \rho = 0$$

により一切が簡単になる．従って Maxwell の方程式は

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \mathsf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathsf{H}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathsf{E} = 0, \\ \operatorname{curl} \mathsf{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathsf{E}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathsf{H} = 0 \end{cases}$$

となる．4 次元空間に **Lorentz 計量**を導入して

$$dx^1,\ dx^2,\ dx^3,\ c\,dt$$

が正規直交系になるようにしよう：

$$(dx^i, dx^j) = \delta^{ij}, \qquad (dx^i, c\,dt) = 0,$$
$$(c\,dt, c\,dt) = -1.$$

符号定数は 3−1=2 である．

2.7 節の公式により

$$*\,(dx^1dx^2) = -dx^3(c\,dt) \qquad \text{等々},$$
$$*\,(dx^1c\,dt) = dx^2dx^3 \qquad \text{等々}$$

であるから，次式を得る．

$$\alpha = (E_1dx^1 + \cdots)(c\,dt) + (H_1dx^2dx^3 + \cdots),$$
$$\beta = -(H_1dx^1 + \cdots)(c\,dt) + (E_1dx^2dx^3 + \cdots)$$
$$= *\alpha.$$

従って，自由空間では Maxwell の方程式は次のように簡単になる：

$$\begin{cases} d\alpha = 0, \\ d*\alpha = 0. \end{cases}$$

一般の場合に戻ろう．次のような一群の 1-形式を導入して計算を洗練しよう．

$$\omega_1 = E_1dx^1 + E_2dx^2 + E_3dx^3,$$
$$\omega_2 = B_1dx^2dx^3 + B_2dx^3dx^1 + B_3dx^1dx^2,$$
$$\omega_3 = H_1dx^1 + H_2dx^2 + H_3dx^3,$$
$$\omega_4 = D_1dx^2dx^3 + D_2dx^3dx^1 + D_3dx^1dx^2,$$
$$\omega_5 = J_1dx^2dx^3 + J_2dx^3dx^1 + J_3dx^1dx^2.$$

これらは空間変数の微分しか含まない．さて“空間変数だけに関する外微分”を $d'$ で表わすことにする．そして $\partial/\partial t$ を次のように導入する．

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega_1)=\dot{\omega}_1=\dot{E}_1dx^1+\cdots \qquad 等々.$$

さて，Maxwell の方程式は次のようになる.

$$\begin{cases} d'\omega_1=-\dfrac{1}{c}\dot{\omega}_2, \\ d'\omega_3=\dfrac{4\pi}{c}\omega_5+\dfrac{1}{c}\dot{\omega}_4, \\ d'\omega_2=0, \\ d'\omega_4=4\pi\rho\, dx^1dx^2dx^3. \end{cases}$$

**エネルギー流量の Poynting ベクトル** $\mathsf{S}$ は

$$\mathsf{S}=\left(\frac{c}{4\pi}\right)\mathsf{E}\times\mathsf{H}$$

で導入される．すなわち

$$\left(\frac{c}{4\pi}\right)\omega_1\wedge\omega_3=S_1dx^2dx^3+S_2dx^3dx^1+S_3dx^1dx^2$$

である．すると Poynting の定理

$$\left(\frac{1}{4\pi}\right)\dot{\mathsf{B}}\cdot\mathsf{H}+\mathsf{E}\cdot\mathsf{J}+\left(\frac{1}{4\pi}\right)\mathsf{E}\cdot\dot{\mathsf{D}}+\mathrm{div}\,\mathsf{S}=0$$

は次式から出る.

$$\begin{aligned} d'(\omega_1\wedge\omega_3)&=d'\omega_1\wedge\omega_3-\omega_1\wedge d'\omega_3 \\ &=\left(-\frac{1}{c}\dot{\omega}_2\right)\wedge\omega_3-\omega_1\wedge\left(\frac{4\pi}{c}\omega_5+\frac{1}{c}\dot{\omega}_4\right) \\ &=-\frac{1}{c}\dot{\omega}_2\wedge\omega_3-\frac{4\pi}{c}\omega_1\wedge\omega_5-\frac{1}{c}\omega_1\wedge\dot{\omega}_4. \end{aligned}$$

静止物体に対しては，$\mathsf{D}=\kappa\mathsf{E}$, $\mathsf{B}=\mu\mathsf{H}$ と仮定する．ここで**誘電率** (dielectric constant) $\kappa$ と**透磁率** (permeability) $\mu$ は時間について一定である．すると Poynting の定理は

$$-\frac{\partial u}{\partial t}=\mathrm{div}\,\mathsf{S}+\mathsf{E}\cdot\mathsf{J}$$

となる．ただしここで

$$u=\frac{1}{8\pi}(\kappa\mathsf{E}^2+\mu\mathsf{H}^2)$$

は場の**エネルギー密度**(energy density)である．量 $\mathsf{E}\cdot\mathsf{J}$ は**熱化学能**(thermo-chemical activity)と呼ばれる．

## 4.7 問　　題

**1.** 円柱座標でラプラシアンの公式を展開せよ．

**2.** 複素行列 $A$ が $AA^*=I$ を満たすとき，これを**ユニタリ**(unitary)という．ここで $A^*={}^t\bar{A}$ は $A$ の共役行列の転置行列である．$A^*+A=0$ なるとき，$A$ を**歪エルミット**(skew-hermitian)という．ユニタリ行列と歪エルミット行列の間の関係を論ぜよ．

**3.** 実行列 $A$ に対して，もし $A$ が歪対称ならば，$e^A$ は直交行列なることを証明せよ．ただし

$$e^A = I+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^n}{n!}.$$

**4.** 半径 $R$ の球面上に動基底を設定し構造方程式を求めよ．また曲率を計算せよ．

**5.** 次の曲面を $x$-軸のまわりに回転して得られる回転曲面の Gauss 曲率を求めよ．

$$\begin{cases} x = \cos\theta+\ln\tan\dfrac{\theta}{2} & (\ln\text{: } e \text{ を底とする自然対数}), \\ y = \sin\theta, \\ \dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi. \end{cases}$$

**6.** 曲面が $z=f(x,y)$ の形で与えられたとき，$f$ とその偏微分係数で $H$ と $K$ とを表わす公式を展開せよ．

**7.** $\Sigma$ を曲面とする．$\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2$ および $\mathsf{e}_1', \mathsf{e}_2'$ を $\Sigma$ の接ベクトルのなす2組の動基底とする．対応する $\varpi$ と $\varpi'$ の間の関係を定め，$d\varpi=d\varpi'$ を検証せよ．

**8.** $\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_3$ および $\mathsf{e}_1', \mathsf{e}_2', \mathsf{e}_3'$ を $\mathsf{E}^3$ 中の2組の動基底とする．これらの基底間の関係を与える直交行列を設定し，対応する $\Omega$ と $\Omega'$ が如何に関係しているかを定めよ．

# 第V章　多様体と積分

## 5.1 紹　介

$n$ 次元多様体とは何か．それは一つの空間ではあるが，必ずしも Euclid 空間でもなく，また Euclid 空間中の領域でもない．しかしその空間中に住んでいる近視眼の観測者の目には，ちょうど Euclid 空間のように見える——そんな空間が $n$ 次元多様体である．適切な一例は，2次元球面 $S^2$ である．これは Euclid 平面 $E^2$ の一部分とは考えられない．しかしながら，$S^2$ 上のわれわれの(近視眼の)観測者には，彼に極く近い所は2個の座標で記述できることがわかる．従って彼は，彼の近傍と $E^2$ 上の小領域との間の区別をすることが出来なくなる．

$n$ 次元多様体と称する或る種の空間を十分な正確さで記述して，そのような空間上で函数やテンソルや微分形式を定義できるようにする——という技術的な問題が生ずる．以下に述べる定義はこのような動機から生じたものである．多様体上の各観測者は，$n$ 個の座標で記述される所の一つの小さい近傍(局所座標近傍)をもつ．空間の各点は，これらの観測された近傍達の少くもどれか一つの上になければならない．さて，同時に2人の観測者を考えれば，彼等の小近傍同士が交わる(重なり合う)こともありうる．そのような重なり合いのおのおのに対して，そこで何が起るかを明細に述べる必要がある．以下の3節において，これらの事柄を或る配慮をもって扱うことにする．

これが成しとげられたら，次に微分形式の積分を定義するという問題と取り組む．5節と6節では，鎖(チェイン)すなわち微分形式がその上で積分されるような幾何学的集合，を定義して土台を置き，次に7節で積分を定義する．

## 5.2 多 様 体

$n$ **次元多様体**($n$-dimensional manifold)は，空間 M と**局所座標近傍**の系(lo-

cal coordinate neighborhoods) $\mathsf{U}_1, \mathsf{U}_2, \cdots$ からなる．ただし M の各点はこれらの U の少なくともどれか一つの中にあるとする．そして各 U 上には座標系

$$x^1, \cdots, x^n$$

が与えられていて，点 $P$ が U 上を動くときに，座標値

$$(x^1(P), \cdots, x^n(P))$$

達は，$n$ 次元 Euclid 空間 $\mathsf{E}^n$ 中の一つの開領域をなすものとする．

局所座標近傍 U 上には座標系

$$x^1, \cdots, x^n$$

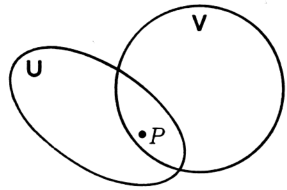
があり，局所座標近傍 V 上には座標系

$$y^1, \cdots, y^n$$

があり，U と V とは交わる(重なり合う)とする．すると交点 $P$ の V 座標 y を，$P$ の U 座標 x を用いて表わせる：

$$y^i = y^i(x^1, \cdots, x^n) \qquad (i=1, \cdots, n).$$

このとき，多様体の定義の一部として，**次のことを仮定する：これらの函数達は滑らか(何回でも連続微分可能)である**．




この形式的な定義を出発点として，若干の帰結を調べよう．まず第一に，上記の U と V の交わりの上で，U と V の役割を交換してよいから，滑らかな函数

$$x^j = x^j(y^1, \cdots, y^n) \qquad (j=1, \cdots, n)$$

が生ずる．代入して

$$y^i = y^i(x^1(\mathsf{y}), \cdots, x^n(\mathsf{y}))$$

を得る．合成函数の微分法によりこれを微分すれば

$$\delta^i{}_k = \sum \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial y^k}$$

を得る．これを行列を用いて解釈すれば

$$\left\|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right\|\cdot\left\|\frac{\partial x^j}{\partial y^k}\right\| = I$$

となる．両辺の行列式をとって，次式が得られる：

$$\frac{\partial(y^1, \cdots, y^n)}{\partial(x^1, \cdots, x^n)}\cdot\frac{\partial(x^1, \cdots, x^n)}{\partial(y^1, \cdots, y^n)} = 1.$$

従って函数行列式に対して，次が得られる：

$$\frac{\partial(y^1, \cdots, y^n)}{\partial(x^1, \cdots, x^n)} \neq 0.$$

これは**どんな点でも決して** 0 にならないという意味である．

多様体が**向きづけ可能**(orientable) または**表裏がある**(two-sided) とは，初めに局所座標系達をえらんで，局所座標近傍の交わりではどこでも上記の函数行列式が正であるようにすることができることをいう．

**例**　2 次元球面 $S^2$ を，6 個の局所座標近傍を用いて多様体化しよう．

$$S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

とおく．(すなわち，$E^3$ 中で $x^2+y^2+z^2=1$ を満たすような点 $(x, y, z)$ 全体のなす集合が $S^2$.) 局所座標近傍としては次のものをとる．

$U_1^+ = \{x > 0\}$　　座標系 $y, z$.

$U_1^- = \{x < 0\}$　　座標系 $z, y$.

$U_2^+ = \{y > 0\}$　　座標系 $z, x$.

$U_2^- = \{y < 0\}$　　座標系 $x, z$.

$U_3^+ = \{z > 0\}$　　座標系 $x, y$.

$U_3^- = \{z < 0\}$　　座標系 $y, x$.

これらの近傍達の 2 個の交わりを比べるとき，衒学的に新しい文字を(座標として)導入することは止めることにするが，読者がこのようなだらしのない記法をゆるして下さることを望む．

$U_1^+$ と $U_2^+$ の交わりでは，次の座標変換を得る．

$$\begin{cases} y = \sqrt{1-z^2-x^2} \\ z = z \end{cases} \qquad (x>0,\ y>0).$$

従って，

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(z,x)} = \begin{vmatrix} \dfrac{-z}{\sqrt{\quad}} & \dfrac{-x}{\sqrt{\quad}} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{x}{\sqrt{\quad}} > 0.$$

次に $U_1^+$ と $U_3^-$ の交わりの上では

$$\begin{cases} y = y \\ z = -\sqrt{1-y^2-x^2} \end{cases} \qquad (x>0,\ z<0).$$

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(y,x)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{y}{\sqrt{\quad}} & \dfrac{x}{\sqrt{\quad}} \end{vmatrix} = \frac{x}{\sqrt{\quad}} > 0.$$

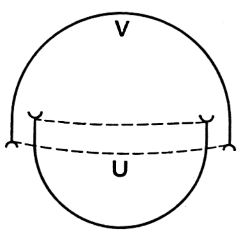
次に $U_2^-$ と $U_3^-$ の交わりの上では

$$\begin{cases} x = x \\ z = -\sqrt{1-y^2-x^2} \end{cases} \qquad (y<0,\ z<0).$$

$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(y,x)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{y}{\sqrt{\quad}} & \dfrac{x}{\sqrt{\quad}} \end{vmatrix} = -\frac{y}{\sqrt{\quad}} > 0 \qquad \text{等々.}$$

かくして2次元球面は2次元多様体であり，上のような局所座標系の選定により，向きづけ可能であることも判った.

球面 $S^2$ を，わずか2個の局所座標近傍で覆うこともできたのである．それには互いに反対側にある二つの半球面をとり，それらを少し延長して，互いに交わる開近傍をなすようにする.



球面 $S^2$ は互いに反対な二つの**向きづけ**(orientation)(回転の向きが反時計まわりか時計まわりかに対応して，外向き或いは内向きの法線をとる)をもつ．同様に向きづけ可能な $n$ 次元多様体は，二つの互いに反対な向きをもつ．二つの向きのうち，一定の一つを指定するには，局所座標 $x^1, \cdots, x^n$ を与える順序を決めればよい．ただし，この順序は**並べ方の偶順列を除いて**与えればよい．局所座標の順序を奇順列に変えれば，反対の向きになる．

M を $n$ 次元多様体とする．M 上の実数値の函数 $f$ が M の点 $P$ で**滑らか**とは次の意味である．U を $P$ を含むような局所座標近傍とし，$x^1, \cdots, x^n$ を U の座標系とする．$f(x^1, \cdots, x^n)$ が $P$ の近所で滑らかであるとき，$f$ が $P$ で滑らかというのである．$f$ に対するこの条件は，特にえらんだ U には**無関係である**．何故なら，二つの座標近傍が $P$ を含む領域で交われば，多様体の定義により，その座標間の関係は互いに他の滑らかな函数となっているからである．M 上の実数値の函数 $f$ が，M の各点で滑らかであるとき，$f$ は M **上で滑らか**という．

同様に，M と N がそれぞれ $m$ 次元，$n$ 次元の多様体であるとき，写像

$$\phi: \mathrm{M} \to \mathrm{N}$$

が滑らかであることを次のように定義する．M 中の U の上の局所座標 $x^1, \cdots, x^m$ と，N 中の V の上の局所座標 $y^1, \cdots, y^n$ について，$\phi$ が滑らかな函数

$$y^i = y^i(x^1, \cdots, x^m) \qquad (i=1, \cdots, n)$$

で表わされる($\phi$ によって V 中に写像されるような U の点のなす U の部分集合の上で)とき，$\phi$ を**滑らかな写像**(smooth mapping)という．

多様体 M が多様体 N の**部分多様体**(submanifold)とは，1 対 1 の滑らかな写像

$$j: \mathrm{M} \to \mathrm{N}$$

があって，次の**正則性**(regularity)の条件を満たすことをいう：(上に書いた)局所座標系について，行列

$$\left\| \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right\|$$

は，各点で(最大の)階数 $m$ をもつ．このとき写像 $j$ 自身をも，M の N 中への

**注入**(injection)または**埋蔵**(imbedding)という.

この概念は特に $\mathsf{N}=\mathsf{E}^n$ のときに適用されて，Euclid 空間の部分多様体の概念を与える. 多様体の理論において，次の事実が証明されている：あまり大き過ぎないような $m$ 次元の多様体は，$\mathsf{E}^n$ $(n=2m+1)$ の中に埋蔵することができる.

## 5.3 接ベクトル

多様体 M とその上の点 $P$ を考える. いまからやろうというのは，点 $P$ における接空間と呼ばれる所の，点 $P$ での接ベクトル達を要素とする $n$ 次元ベクトル空間を定義することである. Euclid 空間という単純地帯にいるわけではないから，点 $P$ から出る矢(有向線分)を引いているだけでは事は済まない. 普通の Euclid 空間のベクトルを，矢や有向線分には全然依存しないような仕方で，考察の対象とする一つの方法が必要になってくる. その答は簡単である：Euclid ベクトルを，方向微分と見做すことが出来る. かくして，$P$ が $\mathsf{E}^3$ の点で $\mathsf{v}=(a,b,c)$ が点 $P$ でのベクトルならば，$\mathsf{v}$ を次の作用素と同一視することができる.

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z}\right)\Bigg|_P.$$

(垂直縦棒の意味は，点 $P$ での値をとること)この作用素が函数の和と積に対してもつ効果は，通常の通りである. これを動機として次の定義が生ずる.

まず記号を一つ. 多様体 M に対して

$$\mathsf{F}^0(\mathsf{M})$$

で，M 上の滑らかな実数値函数全体のなす空間を示す.

$P$ を多様体 M の点とする. $P$ における**接ベクトル**(tangent vector) $\mathsf{v}$ とは，作用素

$$\mathsf{v}:\ \mathsf{F}^0(\mathsf{M})\to\mathsf{R}\qquad(実数体)$$

であって，次の2条件を満たすものをいう.

(i) $\mathsf{v}(af+bg)=a\mathsf{v}(f)+b\mathsf{v}(g)$ $\qquad(a,b$ は定数).

(ii) $\mathsf{v}(f\cdot g)=g(P)\mathsf{v}(f)+f(P)\mathsf{v}(g)$.

かくして，$\mathsf{v}$ は $\mathsf{M}$ 上で滑らかな各函数 $f$ に，一つの実数 $\mathsf{v}(f)$ を割り当てることになる．

まず次のことを見ておこう：定数函数 $c$ に対しては，$\mathsf{v}(c)=0$ である．何故なら，(i)で $f=g=0$, $a=b=1$ とおいて $\mathsf{v}(0)=0$ が出る．また(ii)で $f=g=1$ とおいて $\mathsf{v}(1)=0$ が出る．次に(i)で $f=1$, $g=0$, $a=c$ とおいて，$\mathsf{v}(c)=0$ が出るからである．次に(ii)で $g=c$ とおいて，

$$\mathsf{v}(cf)=c\mathsf{v}(f)$$

が任意の函数 $f$ で成り立つ．

次に，$x^1, \cdots, x^n$ を点 $P$ の或る近傍で成り立つような一つの局所座標系とする．すると，次の各作用素

$$\mathsf{v}_i=\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_P$$

は，容易に確かめられるように，接ベクトルである．

点 $P$ における接ベクトルの全体 $\mathsf{T}_P$ は線型空間をなす．これを点 $P$ での $\mathsf{M}$ の**接空間**(tangent space)という．上記の**ベクトル $\mathsf{v}_i$ 達が接空間の基底をなす**ことを示そう．

$$(x^1, \cdots, x^n)|_P=(c^1, \cdots, c^n)$$

とおく．点 $P$ での任意の接ベクトル $\mathsf{v}$ に対して

$$\mathsf{v}(x^i)=\mathsf{v}(x^i-c^i)=a^i$$

とおく．さて，$f$ が $\mathsf{M}$ 上の任意の滑らかな函数ならば，$f$ を第1次の項まで Taylor 展開し，剰余項は整の形にとれば

$$f(\mathsf{x})=f(\mathsf{c})+\sum(x^i-c^i)g_i(\mathsf{x}),$$

$$g_i(\mathsf{c})=\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_P$$

となる．すると

$$\mathsf{v}(f)=\mathsf{v}[f(\mathsf{c})]+\sum g_i(\mathsf{c})\mathsf{v}(x^i-c^i)+\sum(c^i-c^i)\mathsf{v}(g_i)$$

$$= 0 + \sum a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_P + 0 = \sum a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_P$$

となるから

$$\mathsf{v} = \sum a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_P$$

となる．これで証明できた．$a^1, \cdots, a^n$ を，座標系 $\mathsf{x}$ に関する $\mathsf{v}$ の**成分**(component)という．点 $P$ で有効な他の座標系 $\mathsf{y}$ に対し

$$\mathsf{v} = \sum b^i \frac{\partial f}{\partial y^i}\bigg|_P$$

ならば，合成函数の微分法により次式を得る．

$$b^i = \sum a^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\bigg|_P.$$

これは普通，ベクトルの反変成分に対する変換則と呼ばれているものである．ここで，いまはただ一つの点で考えているのだから，$a^i$ と $b^j$ は定数であることに注意しておく．

$\mathsf{M}$ 上の**ベクトル場**(vector field)とは，$\mathsf{M}$ の各点において接ベクトルを滑らかに指定することをいう．局所座標で書けば

$$\mathsf{v} = \sum a^i(\mathsf{x}) \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (a^i(\mathsf{x}) \text{ は滑らかな函数})$$

となる．座標近傍の重なり合う所では

$$\mathsf{v} = \sum b^i(\mathsf{y}) \frac{\partial}{\partial y^i},$$

$$b^i(\mathsf{y}(\mathsf{x})) = \sum a^j(\mathsf{x}) \frac{\partial y^i}{\partial x^j}$$

となる．

## 5.4 微分形式

$\mathsf{M}$ 上の滑らかな函数を 0-形式(0-form；0 次外微分形式の略式呼称)ともいう．これらは一つの空間 $\mathsf{F}^0(\mathsf{M})$ をなしている．これを $\mathsf{M}$ 上の 0-形式の空間という．

さて次に，M の点 $P$ における 1-形式(one-form)なるものを定義しよう†．それは点 $P$ を含む近傍 U で有効な各局所座標系 $(x^i)$ に対して，是非とも次のような式でなくてはいけない：

$$\sum a_i dx^i \qquad (a_i \text{ 達は定数}).$$

しかも，$P$ で考えたそのような任意の二つの式

$$\sum a_i dx^i, \qquad \sum b_i dy^i$$

の間に

$$\sum b_i \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\bigg|_P = a_j$$

なる関係(共変ベクトルの成分の普通の変換則)があるときに，上の2式は同一のものと見做すのである．明らかにこの定義は第III章で考えた局所的な場合と完全に首尾一貫している．

$P$ での 1-形式の定義ができたから，$P$ での 1-形式達の外積の和を考えて，$P$ での $p$-形式($p$ 次外微分形式の略)が定義される．(すなわち，$P$ での 1-形式達のなすベクトル空間に対して，2.1 節の $p$-ベクトルの空間を作れば，それが $P$ での $p$-形式のなす空間になるのである.) さて次に **M 上の $p$-形式**なるものが定義される．これは M の各点 $P$ に，$P$ での $p$-形式を一つずつ滑らかに対応させることである．U を局所座標系 $(x^i)$ をもつ座標近傍とすれば，U 上で $p$-形式 $\omega$ は次のように表示される：

$$\omega = \sum a_H(\mathsf{x})\, dx^H.$$

ただし，$a_H(\mathsf{x})$ は U 上の滑らかな函数で，$H=\{h_1, \cdots, h_p\}$ である．

この座標近傍と交わる別の座標近傍の上での $\omega$ の表示が

$$\omega = \sum b_K(\mathsf{y})\, dy^K$$

ならば，$a$ 達と $b$ 達の間の関係は次のようにして得られる．$y^i$ の所へ $y^i = y^i(\mathsf{x})$ を代入し，そして $dy^i$ の所へ

---

† (訳註)　接空間 $T_P$ 上で定義された実数値の 1-形式を点 $P$ での 1 次外微分形式と呼ぶ——という仕方もある．こちらの方がわかり易いと思われる読者は‘数学的’なのである．本文の定義は‘実践的’ではあるが，やや不明確な感じを与え易い．

$$\sum \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j$$

を代入するのである．3.4節で調べた座標変換のことを使えば，M上の$p$-形式達のなす空間

$$\mathrm{F}^p(\mathrm{M})$$

が完全に定義され，そしてM上の二つの外微分形式$\omega$と$\eta$との外積

$$\omega \wedge \eta$$

が，Mの各点での外積をとることによって遂行されることがわかる．また，M上の外微分形式の外微分が，それの各局所座標系での表示式の外微分をとることによってうまく定義されることがわかる．

第III章のすべての法則は直ちに検証される．例えば

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{(\deg \omega)} \omega \wedge d\eta.$$

MとNとが多様体で，

$$\phi\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$$

が滑らかな写像ならば，自然に次のような写像$\phi^*$がひきおこされる：

$$\phi^*\colon \mathrm{F}^p(\mathrm{N}) \to \mathrm{F}^p(\mathrm{M}).$$

これもやはり，一つの局所座標系で同時に局所的構成をしておき，次にその結果をつなぎ合わせて定義される．局所理論のときと同様に次の結果が成り立つ．

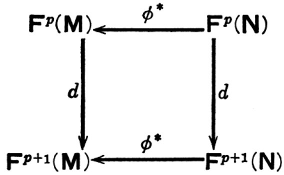
(i) $\phi^*(\omega+\eta) = \phi^*\omega + \phi^*\eta$.

(ii) $\phi^*(\lambda \wedge \mu) = (\phi^*\lambda) \wedge (\phi^*\mu)$.

(iii) $d(\phi^*\omega) = \phi^*(d\omega)$.

上の最後の等式は次の**可換図式**(commutative diagram)を用いて表わされる．

F$^p$(N)からF$^{p+1}$(M)へ行く二つの可能な路のどちらも同じ結果(写像として)



を与えるのである．

実際上は，多様体上の微分形式はしばしば次のようにして作られる．まず前もってM上の幾つかの滑らかな函数 $f, g, \cdots$ が知られている．これらから1-形式 $df, dg, \cdots$ が作られる．さらに今度はこれらから外積をとって，高次の外微分形式が作られるというわけである．

**例1**　5.2節で考えた球面 $S^2$ 上では，函数 $x, y, z$ は滑らかな0-形式である．よって，$dx, dy, dz$ は1-形式となり，$dxdy, dydz, dzdx$ は2-形式である．近傍 $U_1^+$ 上では次式が成り立つ．

$$x^2 = 1-y^2-z^2,$$

$$dx = \frac{-y\,dy-z\,dz}{x},$$

$$dxdy = \frac{-y\,dy-z\,dz}{x}dy = \frac{z}{x}dydz \qquad \text{等々}.$$

**例2**　円周 $S^1=\{x^2+y^2=1\}$．ここでは $x$ と $y$ とが $S^1$ 上の函数で

$$x\,dx+y\,dy = 0$$

が成り立つ．これは次の1-形式 $\alpha$ が定義されることを意味する．$x\neq0$ となる点では

$$\alpha = \frac{dy}{x}$$

とおく．$x=0$ となる点では $y\neq0$ となり

$$\alpha = -\frac{dx}{y}$$

である．$S^1$ の，全円周ではないような任意の弧の上で，函数 $\theta$ を定義して

$$x = \cos\theta, \qquad y = \sin\theta$$

になるようにできる．従ってそのとき

$$\alpha = d\theta$$

である．$S^1$ 全体の上ではこのような函数 $\theta$ が存在しないことは強調する必要がある——そのような函数がもしあれば，$S^1$ 上の何処かで $2\pi$ だけ跳躍することになる．

## 5.5 Euclid 単体

この節では，標準的な建築素材について述べる．後でこれらの素材をつなぎ合わせて積分の場——$p$-形式をその上で積分できるような，多様体中の $p$ 次元的なひろがり——を作るのである．これらの建築素材を各次元の Euclid 単体という——この節では Euclid なる形容詞をくりかえすことをやめるが，すべてのことが Euclid 空間中で起るものと了解しておく．

**0-単体**とは1点 $(P_0)$ をいう．

**1-単体**とは，直線上の向きのついた閉線分をいう．それは，その頂点の順序も考えた対 $(P_0, P_1)$ で完全に定まる．

**2-単体**とは，頂点の順序を考えた閉三角形をいう．それは，考えている順序に頂点を並べたトリプル

$$(P_0, P_1, P_2)$$

により完全に定まる．同様に **3-単体**が定義される．それは順序を考えに入れた4点の組

$$(P_0, P_1, P_2, P_3)$$

であって，そのどの3点も同一直線上にないようなものをいう．幾何学的にはこれは四面体を表わす．最後に **$n$-単体**($n$-simplex)とは，一定の順序にとった $(n+1)$ 個の独立な点[†] $P_0, P_1, \cdots, P_n$ を含む最小の閉じた凸集合

$$(P_0, P_1, \cdots, P_n)$$

をいう．このようにして張られた幾何学的な点集合は次の形の点の全部よりなる：

$$P = t_0P_0+\cdots+t_nP_n, \qquad t_i \geqq 0, \qquad \sum t_i = 1.$$

すなわち点 $P_0, \cdots, P_n$ にそれぞれ負でない質量 $t_0, \cdots, t_n$ を種々に与えた質点系のあらゆる可能な重心達よりなる．

単体 s の**境界**(boundary) $\partial$s とは，次のような1次元低い単体達の整係数の形式的な和である：

---

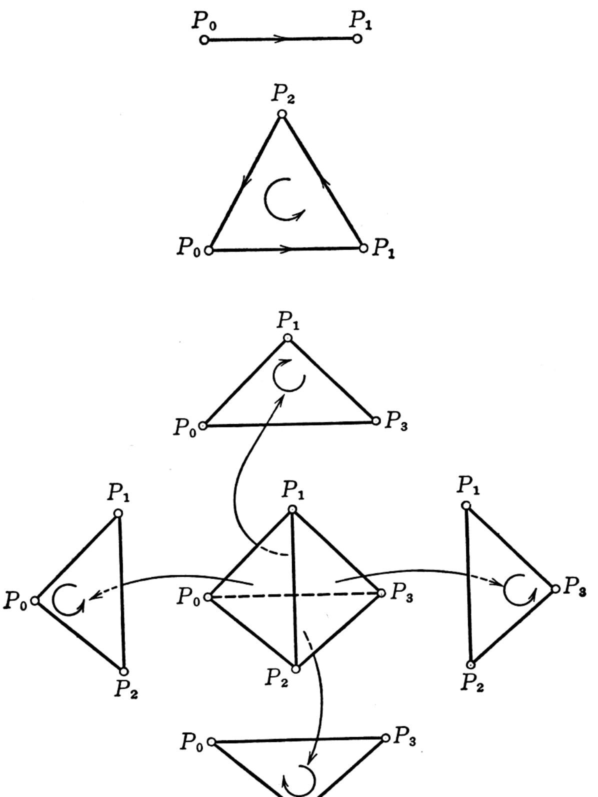
† これは $n$ 個のベクトル $(P_1-P_0), (P_2-P_0), \cdots, (P_n-P_0)$ が1次独立であることを意味する．

$$\partial(P_0, P_1, \cdots, P_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (P_0, P_1, \cdots, P_{i-1}, P_{i+1}, \cdots, P_n).$$

低次元の場合を調べれば，これが向きのついた領域の境界という慣用のアイデアと矛盾していないことが確信される．

$$\partial(P_0, P_1) = (P_1) - (P_0),$$
$$\partial(P_0, P_1, P_2) = (P_1, P_2) - (P_0, P_2) + (P_0, P_1),$$
$$\partial(P_0, P_1, P_2, P_3) = (P_1, P_2, P_3) - (P_0, P_2, P_3) + (P_0, P_1, P_3) - (P_0, P_1, P_2).$$

三角形においては，頂点の順序づけは三角形の回転の向きを与える．四面体においては，頂点の順序づけは空間に右手系ネジの向きを与え，そしてその各三



角形の面に回転の正の向き(外向きにひかれた法線)をひきおこす．$\partial \mathrm{s}$ 中のおのおののマイナスの記号は，この回転の向きについて逆にすることを表わすと思うことにするのである．すると結果は次の通り：$\partial(P_0, \cdots, P_3)$ は，四面体の外部にひいた法線に関して向きをつけた幾何学的境界を表わす．

**$n$-鎖**($n$-chain)とは次のような形式的な和

$$\mathrm{c} = \sum a^i \mathrm{s}_i$$

をいう．ただしここで $a^i$ 達は定数で，$\mathrm{s}_i$ 達は $n$-単体である．その**境界**を次式で定義する．

$$\partial \mathrm{c} = \sum a^i (\partial \mathrm{s}_i).$$

基本的結果は，各鎖の境界それ自身の境界は 0 になる：

$$\partial[\partial \mathrm{c}] = 0$$

という事実である．これを検証するには単体の場合をやればよい．低次元の場合を試みよう：

$$\begin{aligned}\partial[\partial(P_0, P_1, P_2)] &= \partial(P_1, P_2) - \partial(P_0, P_2) + \partial(P_0, P_1)\\ &= [(P_2) - (P_1)] - [(P_2) - (P_0)] + [(P_1) - (P_0)] = 0.\\ \partial[\partial(P_0, \cdots, P_3)] &= [(P_2, P_3) - (P_1, P_3) + (P_1, P_2)]\\ &\quad - [(P_2, P_3) - (P_0, P_3) + (P_0, P_2)]\\ &\quad + [(P_1, P_3) - (P_0, P_3) + (P_0, P_1)]\\ &\quad - [(P_1, P_2) - (P_0, P_2) + (P_0, P_1)] = 0.\end{aligned}$$

これから一般の場合のアイデアが説明される．すなわち各面が反対の符号で 2 度生ずるのである．すなわち

$$\partial[\partial(P_0, \cdots, P_n)]$$

を計算すれば，

$$(P_0, \cdots, P_{i-1}, P_{i+1}, \cdots, P_{j-1}, P_{j+1}, \cdots, P_n)$$

が 2 度得られる．しかも反対の符号で現われる．何故ならそれらは次からそれぞれ 1 回ずつ得られるからである：

$$\partial(P_0, \cdots, P_{i-1}, P_{i+1}, \cdots, P_n),$$
$$\partial(P_0, \cdots, P_{j-1}, P_{j+1}, \cdots, P_n).$$

従って打消し合い，$\partial[\partial c]=0$ が得られた．

二つの $n$-単体 $(P_0, \cdots, P_n)$ と $(Q_0, \cdots, Q_n)$ とが与えられたとき，その間に頂点の順序を保存するような線型対応が一意的に存在する．それは

$$\sum_0^n t_i P_i \leftrightarrow \sum_0^n t_i Q_i \qquad \left(t_i \geqq 0,\ \sum_0^n t_i = 1\right)$$

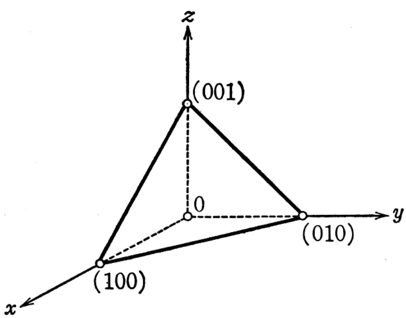
で与えられる．

積分を定義するためには，各次元の単体の標準的な模型があると便利である．**標準的 $n$-単体**(standard $n$-simplex)

$$\bar{s}^n = (R_0, \cdots, R_n)$$

を，$E^n$ 中の単体で次の頂点をもつものとして定義する．

$$R_0 = 0,$$
$$R_1 = (10\cdots0),$$
$$R_2 = (010\cdots0),$$
$$\cdots\cdots$$
$$R_n = (00\cdots01).$$




さて，積分に関して一つの規約を設けねばならない．$\omega$ を，$\bar{s}^n$ を含む $E^n$ の領域 U 上で定義された $n$-形式とする．次の積分を定義したいのである．

$$\int_{\bar{s}^n} \omega.$$

それを次のように行なう．まず $\omega$ を変数の順序を自然の順序にとり，一意的に

$$\omega = A(x^1, \cdots, x^n)\, dx^1 \cdots dx^n$$

と書く．次に

$$\int_{\bar{s}^n}\omega=\int_{\bar{s}^n}A(\mathrm{x})\,dx^1\cdots dx^n$$

とおくのである．ただし，ここで右辺は普通の意味の $n$ 重積分である．従って右辺の計算は，“変数の順序をどうとろうと”任意の逐次積分法によって求めてよいのである．

例えば，$\omega=dzdydx$ ならば

$$\int_{\bar{s}^3}\omega=-\int_{\bar{s}^3}dxdydz=-\int_0^1 dy\int_0^{1-y}dx\int_0^{1-x-y}dz=-\frac{1}{6}.$$

## 5.6 鎖と境界

さて多様体 M を考え，**M 中の $n$-単体**を定義しよう．予備的定義として，まず M 中の予備的単体なるものを考える．これは三つのものからなる：Euclid $n$-単体 $\mathrm{s}^n$ と，$\mathrm{s}^n$ の Euclid 空間中の近傍 U† と，滑らかな写像

$$\phi:\ \mathrm{U}\to\mathrm{M}$$

とである．この予備的単体を

$$(\mathrm{s}^n,\mathrm{U},\phi)$$

で表わす．さらにもう一つの予備的単体

$$(\mathrm{t}^n,\mathrm{V},\psi)$$

が与えられているとしよう．これが次の条件を満たすならば，初めの予備的単体と同じと考えることにする：

$$\phi\left(\sum_0^n t_iP_i\right)=\psi\left(\sum_0^n t_iQ_i\right)\qquad\left(t_i\geqq 0,\ \sum_0^n t_i=1\right),$$

ただしここで

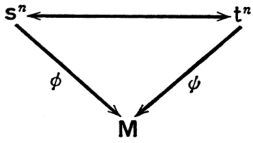
$$\mathrm{s}^n=(P_0,P_1,\cdots,P_n),\qquad \mathrm{t}^n=(Q_0,Q_1,\cdots,Q_n)$$

とする．換言すれば，$\mathrm{s}^n$ と $\mathrm{t}^n$ との間に頂点の順序を保存する自然な線型対応

† すなわち，$\mathrm{s}^n$ を含む Euclid 空間中の最小の平坦な部分多様体における近傍である．この最小の平坦な部分多様体は，$\mathrm{s}^n=(P_0,\cdots,P_n)$ として，$\sum_0^n t_iP_i$ ($t_i$ 達は実数で $\sum t_i=1$) なる点の全体のなす集合である．

$$s^n \leftrightarrow t^n$$

を設定するとき，あらゆる対応点 $P$ と $Q$ とに対して $\phi(P)=\psi(Q)$ が成り立つことである．このことはまた次の可換図式でも表わせる：




このような意味で，一つの予備的単体に同一となるような予備的単体 $(s^n, U, \phi)$ 達の全体は一つの考察対象となる．これを $\sigma^n$ の如き記号で表わし，**M 中の $n$-単体**という．

上に導入した開近傍 U は，境界での微分可能性に関する困難を消すのに役立つに過ぎない．

$\sigma^n$ が $(s^n, U, \phi)$ で代表される単体ならば，$s^n$ は面 $t_0, \cdots, t_n$ をもち，各 $t_i$ は Euclid $(n-1)$-単体である．ただしここで

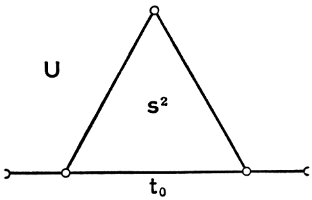
$$\partial s^n = \sum \pm t_i$$

である．種々の $t_i$ に対して，U の中に $t_i$ の開近傍 $V_i$ を作る．そして $\phi$ をこれらの $V_i$ 上に制限して，$\sigma^n$ の**面**(face)を定義する．従って各面は

$$\tau_i = (t_i, V_i, \phi)$$

で代表される．対応して $\sigma^n$ の境界も次式で定義される．

$$\partial\sigma^n = \sum \pm\tau_i.$$




$\partial\sigma^n$ は M 中の $(n-1)$-鎖である．ここで **M の $n$-鎖** c なる言葉は形式的な和

$$c = \sum_i a_i \sigma^n{}_i$$

を意味する．ただし係数 $a_i$ は定数で，$\sigma^n{}_i$ 達は M の $n$-単体である．鎖の和や

鎖の定数倍の定義は自然になされる．M の $n$-鎖全体†のなす集合を

$$\mathrm{C}_n(\mathrm{M})$$

と記す．そして $\mathrm{c}=\sum a_i\sigma^n{}_i$ に対して

$$\partial\mathrm{c} = \sum a_i\partial\sigma^n{}_i$$

とおく．かくして次の写像が得られた．

$$\partial:\ \mathrm{C}_n(\mathrm{M}) \to \mathrm{C}_{n-1}(\mathrm{M}) \qquad (n=1, 2, \cdots).$$

境界作用素 $\partial$ の基本的性質は，対応する Euclid 空間の場合から直ちに出る：**各 $n$-鎖 c に対して**

$$\partial(\partial\mathrm{c}) = 0.$$

境界が 0 になるような鎖 z, $\partial\mathrm{z}=0$, を**輪体**(cycle)という．

1 次元高い或る鎖 c の境界をなすような鎖 b, $\mathrm{b}=\partial\mathrm{c}$, を**境界輪体**(bounding cycle)或いは単に**境界**(boundary)という．

境界は必ず輪体である．何故なら，$\mathrm{b}=\partial\mathrm{c}$ ならば次式が成り立つから．

$$\partial(\mathrm{b}) = \partial(\partial\mathrm{c}) = 0.$$

更に注意すべきことは次のことである．予備的単体 $(\mathrm{s}^n, \mathrm{U}, \phi)$ の定義において，U から M 中への滑らかな写像 $\phi$ が 1 対 1 写像であることを**要求してはいない**．実際，$\phi$ が $\mathrm{s}^n$ 全体を低次元空間の中にもって行くことも，1 点に写してしまうことでさえ起るかも知れない．しかし詳しく研究してみると，このような'悪い'写像を採用しても何の害もないばかりか，これらを避けようと試みると非常に大きな技術的困難が生ずることがわかるのである．

## 5.7　微分形式の積分

与えられている資料は，任意次元の多様体 M と，M 上の $p$-形式 $\omega$ と，M 上の $p$-鎖 c とである．そこで

$$\int_{\mathrm{c}} \omega$$

† 位相数学の正確な用語でいえば，順序づけられた，特異・可微分 $n$-鎖(ordered singular differentiable $n$-chain).

を定義せねばならない．まず

$$\mathrm{c} = \sum a_i \sigma_i$$

とおく．ただしここで $a_i$ 達は定数で，$\sigma_i$ 達は $p$-単体である．そして

$$\int_{\mathrm{c}} \omega = \sum a_i \int_{\sigma_i} \omega$$

とおく．従って残るのは，$\omega$ の $p$-単体 $\sigma$ 上の積分を定義することである．さて，$\sigma$ を次の形に表わせる：

$$(\bar{\mathrm{S}}^p, \mathrm{U}, \phi).$$

ここで $\bar{\mathrm{S}}^p$ は $\mathrm{E}^p$ 中の標準的 $p$-単体で，$\phi$ は $\bar{\mathrm{S}}^p$ の近傍 U から M の中への滑らかな写像である．さて

$$\int_\sigma \omega = \int_{\bar{\mathrm{S}}^p} \phi^* \omega$$

をもって定義とする．$\phi^*\omega$ は U 上の $p$-形式だから，右辺は前々節で論じた通り，普通の $p$ 重積分である．

応用においては，与えられた幾何学的領域がどのようにして一つの鎖と考えられるかを，一字一句克明にやりとげることについては，人はめったに心を煩わさないのであって，むしろ経験と直観(これは幾何学における優秀なガイドである)の普通の結合に頼るものである．例えば，$\omega$ が $\mathrm{S}^2=\{x^2+y^2+z^2=1\}$ 上の 2-形式のとき $\mathrm{S}^2$ での $\int \omega$ を求めることになっているとしよう．曲面 $\mathrm{S}^2$ を座標平面群で 8 個の球面三角形に分割し，そのおのおのの上に標準三角形からの写像を設定して云々という手続きよりも，もっと効果的な方法があるのが“普通なのである.”

それでは一体，以上述べてきた鎖や境界や積分に関するかなり長々としたお話の価値は何なのであるか？　いまの時代では，直観的な意味でしか理解されていない事柄を，論理的なそして厳密な基礎の上におくことは，いまさら弁護する必要も殆んどないと思われるし，それに，この手法で行くと，次節ですぐ見るように，一般の Stokes の定理に関して，強力な理論的な道具がここに得られたのである．

演習として，面積分等々を計算するのに用いられる標準的なトリックのどれもが，上述した手法にうまく適合することを確かめることもできよう．しかしここでそれに時間を割く程のこともあるまい．

## 5.8 Stokes の定理

これから確立する一般の結果は，積分をもう1次元高いひろがりの上の積分に直す所のあらゆる知られた公式を含んでいる．

**$\omega$ を多様体 M 上の $p$-形式，c を M 上の $(p+1)$-鎖とする．すると次式が成り立つ．**

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega.$$

c は $(p+1)$-鎖達の定数係数の和だから，$(p+1)$-単体 $\sigma$ に対して次を証明すれば十分である．

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_\sigma d\omega.$$

さて $\sigma$ の表示

$$(\bar{s}^{p+1}, U, \phi)$$

を使えば，定義より

$$\int_\sigma d\omega = \int_{\bar{s}^{p+1}} \phi^*(d\omega) = \int_{\bar{s}^{p+1}} d(\phi^*\omega)$$

となる．これにより問題は Euclid の場合に帰着される：$\eta$ を，$\bar{s}^{p+1}$ の $E^{p+1}$ での近傍 U 上の $p$-形式として，問題は

$$\int_{\partial\bar{s}^{p+1}} \eta = \int_{\bar{s}^{p+1}} d\eta$$

を証明することになる．さて

$$\eta = \sum A_i(x)\, dx^1 \cdots dx^{i-1} dx^{i+1} \cdots dx^{p+1}$$

と書けるから，$\eta$ が単項式のときだけ公式を確かめればよい．符号に注意しつつ座標の順序をとりかえてよいから，次の場合をやれば十分である．

$$\eta = A\, dx^1 \cdots dx^p.$$

すると,

$$d\eta=(-1)^p\frac{\partial A}{\partial x^{p+1}}dx^1\cdots dx^{p+1}$$

となる. $\bar{\mathrm{s}}^{p+1}$ が次の条件を満たすような点 $(x^1,\cdots,x^{p+1})$ の全体よりなることを想起しよう.

$$x^i\geqq 0,\qquad \sum_1^{p+1}x^i\leqq 1.$$

すると

$$\begin{aligned}\int_{\bar{\mathrm{s}}^{p+1}}d\eta&=(-1)^p\int_{\bar{\mathrm{s}}^{p+1}}\frac{\partial A}{\partial x^{p+1}}dx^1\cdots dx^{p+1}\\&=(-1)^p\int_{\left(x^i\geqq 0,\ \sum_1^p x^i\leqq 1\right)}dx^1\cdots dx^p\left(\int_0^{\left(1-\sum_1^p x^i\right)}\frac{\partial A}{\partial x^{p+1}}dx^{p+1}\right)\\&=(-1)^p\int_{\left(x^i\geqq 0,\ \sum_1^p x^i\leqq 1\right)}\left[A\left(x^1,\cdots,x^p,1-\sum_1^p x^i\right)\right.\\&\qquad\left.-A(x^1,\cdots,x^p,0)\right]dx^1\cdots dx^p\end{aligned}$$

を得る. 次に $\partial\bar{\mathrm{s}}^{p+1}$ を調べねばならない.

$$\bar{\mathrm{s}}^{p+1}=(R_0,R_1,\cdots,R_{p+1}),$$

$$\left.\begin{aligned}R_0&=0,\\R_1&=(10\cdots0),\\&\cdots\cdots\\R_{p+1}&=(0\cdots01)\end{aligned}\right\}\ \mathrm{E}^{p+1}\text{ 中の点}$$

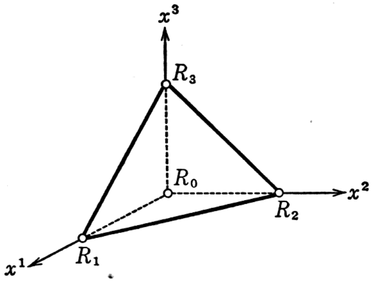
と書くと

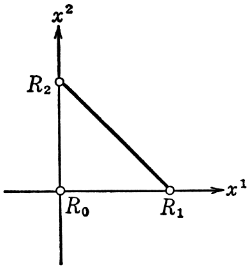
$$\partial\bar{\mathrm{s}}^{p+1}=(R_1,\cdots,R_{p+1})+(-1)^{p+1}(R_0,R_1,\cdots,R_p)+(\text{他の面達})$$

となる. 上式右辺の二つの面以外の面上では, $x^1,\cdots,x^p$ の中のいずれかがそこで定数となるから, $\eta=0$ になる. よって,

$$\int_{\partial\bar{\mathrm{s}}^{p+1}}\eta=\int_{(R_1,\cdots,R_{p+1})}\eta+(-1)^{p+1}\int_{(R_0,R_1,\cdots,R_p)}\eta$$

となる.




面 $(R_0, R_1, \cdots, R_p)$ は標準的 $p$-単体 $\bar{s}^p$ になっている．そしてその上で $x^{p+1}=0$ であるから，

$$(-1)^{p+1}\int_{(R_0,\cdots,R_p)}\eta = (-1)^{p+1}\int_{\bar{s}^p}A(x^1, \cdots, x^p, 0)\,dx^1\cdots dx^p$$

となる．ところがこれは正に，上の $\int d\eta$ の表示式中の第2項に他ならない．次に $\int \eta$ の表示式の第1項の方は，$x^{p+1}$ 方向に真下に正射影して得られる：

$$\int_{(R_1,\cdots,R_{p+1})}\eta = \int_{(R_1,\cdots,R_p,R_0)}A\left(x^1, \cdots, x^p, 1-\sum_1^p x^i\right)dx^1\cdots dx^p$$

$$= (-1)^p\int_{(R_0,R_1,\cdots,R_p)}A\left(x^1, \cdots, x^p, 1-\sum_1^p x^i\right)dx^1\cdots dx^p$$

$$= (-1)^p\int_{\bar{s}^p}A\left(x^1, \cdots, x^p, 1-\sum_1^p x^i\right)dx^1\cdots dx^p.$$

ところがこれは $\int d\eta$ の表示式の第1項である．これで証明完了．

## 5.9 周期と De Rham の定理

一つの例を考えよう．多様体 M は $\mathrm{E}^3$ から原点を除いた残りとする：

$$\mathrm{M} = \mathrm{E}^3 - \{0\}.$$

$\omega$ は M 上の 1-形式で，$d\omega=0$ とする．すると $\omega$ は完全(exact)であろうか？ すなわち，$\omega$ は M 上のある函数の微分になるであろうか？ ここでは 3.6 節の証明は使えない．何故なら M は 1 点に収縮できないからである．けれども $\omega=df$ となる．ここで

$$f(\mathrm{x})=\int_{(1,0,0)}^{\mathrm{x}}\omega$$

であって，積分は0を通らない任意の路 c についてとる．この積分が路によらないことは Stokes の定理から出る．実際，(1, 0, 0) から x に至る M 中の他の路 c′ に対して，鎖 c−c′ は，ある面分 Σ (2-鎖)の境界になり

$$\int_{\mathrm{c}}\omega-\int_{\mathrm{c}'}\omega=\int_{\mathrm{c}-\mathrm{c}'}\omega=\int_{\partial\Sigma}\omega=\int_{\Sigma}d\omega=0$$

となるから．

次に，$\alpha$ は M 上の 2-形式で，$d\alpha=0$ とする．M 上の 1-形式 $\lambda$ を求めて $\alpha=d\lambda$ ならしめる．3.6 節の Poincaré の補題の逆により，かかる 1-形式 $\lambda$ は‘局所的には’存在する．しかしいまは‘大域的’な質問を考えているのである：そのような $\lambda$ が‘M 全体上で’存在するか？ この質問の答は一般には否である．具体的な例は後から述べる．否の理由は，もしもそのような 1-形式 $\lambda$, $d\lambda=\alpha$, があったとすれば，単位球面 $\mathrm{S}^2$ は境界をもたないから

$$\int_{\mathrm{S}^2}\alpha=\int_{\mathrm{S}^2}d\lambda=\int_{\partial\mathrm{S}^2}\lambda=0$$

が成り立つことになる．しかし，“先験的に”

$$\int_{\mathrm{S}^2}\alpha=0$$

を仮定する理由はないのである．正しい結果は次の通り：$\alpha$ が $\mathrm{M}=\mathrm{E}^3-\{0\}$ 上の 2-形式で，$d\alpha=0$ および

$$\int_{\mathrm{S}^2}\alpha=0$$

を満たすならば，M 上のある 1-形式 $\lambda$ により $\alpha=d\lambda$ となる．

この結果は，これから証明なしで結果だけ述べる所の De Rham の定理に含まれている．

以下扱うのは，或るゆるい制限をその大きさについて仮定した多様体 M (固定して考える)である．例えば，M は十分次元の高い Euclid 空間に埋蔵できると仮定する．

$d\omega=0$ を満たす M 上の微分形式 $\omega$ を**閉じた微分形式**(略して**閉形式** (closed

form)) という．

M 上の或る微分形式 $\eta$ に対して $\omega=d\eta$ となるような M 上の微分形式 $\omega$ を，**完全形式**(exact form) という．

**完全形式は必ず閉形式である**:

$$d\omega = d(d\eta) = 0.$$

いま $\omega$ を閉じた $p$-形式としよう．M 上の各 $p$-輪体 z に対して，$\omega$ の周期(period)†

$$\int_{\mathrm{z}} \omega$$

が対応する．もしたまたま z が境界 $\mathrm{b}=\partial\mathrm{c}$ になっていれば周期は 0 になる:

$$\int_{\mathrm{b}} \omega = \int_{\partial\mathrm{c}} \omega = \int_{\mathrm{c}} d\omega = \int_{\mathrm{c}} 0 = 0.$$

この事実から周期の間の関係が出る:

$$(\ddagger)\begin{cases} \text{輪体 } \mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, \cdots \text{ の間に} \\ \qquad \sum a_i \mathrm{z}_i = \text{境界} \\ \text{なる関係があれば} \\ \qquad \sum a_i \int_{\mathrm{z}_i} \omega = 0 \end{cases}$$

**De Rham の第 1 定理** 閉形式が完全であるためには，そのすべての周期が 0 になることが必要十分である．

**De Rham の第 2 定理** 各 $p$-輪体 z に対して実数 per(z) が対応していて，次の首尾一貫性の条件

$$(\ddagger)\begin{cases} \sum a_i \mathrm{z}_i = \text{境界} \quad \text{ならば} \\ \text{必ず} \quad \sum a_i \,\mathrm{per}(\mathrm{z}_i) = 0 \end{cases}$$

を満たしているとする．すると，M 上に閉形式 $\omega$ が存在して，初めに指定された per(z) を周期にもつ:

$$\int_{\mathrm{z}} \omega = \mathrm{per}(\mathrm{z}) \qquad (\text{各 } p\text{-輪体 z に対して}).$$

---

† この名称は，楕円積分および対応する代数函数の微分の周期から来ている．

多くの空間でこれらの定理が使える．というのは大ていは，境界の差を除いて $p$-輪体全部を張るような，有限個の独立な $p$-輪体の系が存在するからである．例えば $n$ 次元球面 $S^n$ 上では，$p>0$, $p\neq n$ のとき，どの $p$-輪体も境界になり，そして $n$ 次元ではただ一つの $n$-輪体（外向き法線で向きづけした $S^n$ それ自身）があって，各 $n$-輪体はこれの何倍かに境界を加えたものになる——ということが知られている．これらのことは代数的位相幾何学(algebraic topology)によって確立されている．

De Rham の定理群を詳しく調べて行くと次の結果が知られる．それは，それ自身極めて魅惑的である．

整数係数の単体の和であるような鎖 $c=\sum a_i\sigma_i$ だけ考えることにする．これらを**整数鎖**(integer-chain)と呼んでもよかろう．対応して，**整数輪体**(integer-cycle)，**整数境界**(integer-boundary)の概念も得られる．閉形式 $\omega$ の**整数周期**(integer-period)とは，$\omega$ が整数輪体上だけでとる周期

$$\int_z \omega$$

をいう．

**$\omega$ および $\eta$ をそれぞれ次数 $p$ および $q$ の閉形式とする．$\omega$ と $\eta$ の整数周期の値がすべて整数であるならば，同じことが $\omega\wedge\eta$ についても成り立つ．**

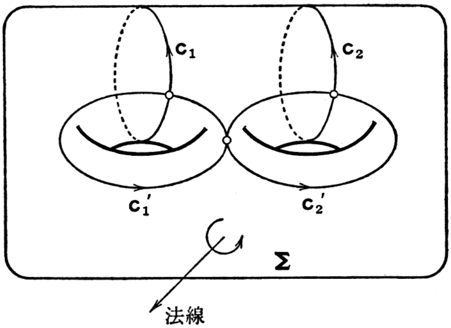
### 5.10　曲面．いくつかの例

位相幾何学において，$E^3$ 中のどの閉曲面も，$h$ 個のハンドル（把手）のついた球面（$h$ 個の穴のあいたボタンといってもよい）に，滑らかに変形されることが証明されている．$h=2$ の場合を考えよう．そしてこの曲面 $\Sigma$ を外向きにひいた法線で向きをつけよう．意味のある 2-輪体は $\Sigma$ 自身だけである．De Rham の第1定理により，この曲面上の 2-形式 $\alpha$ が完全形式になるのは

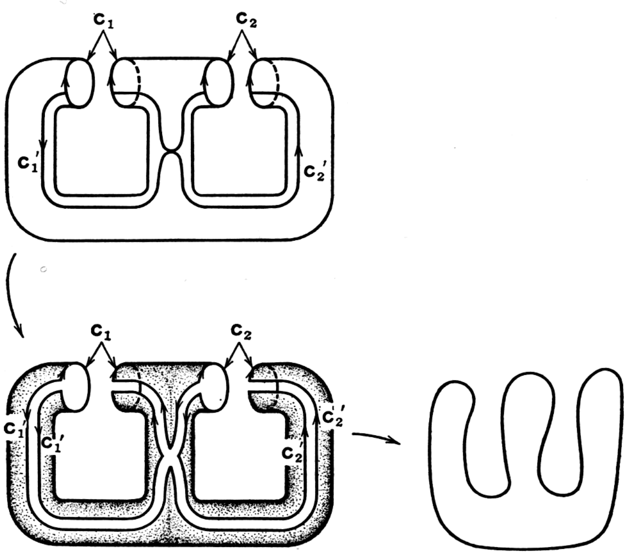
$$\int_\Sigma \alpha = 0$$

の時，そしてその時に限る．（$\Sigma$ が2次元なるため 2-形式は必ず閉じている．）

意味のある 1-輪体は四つ：$c_1, c_1', c_2, c_2'$ である．ここで $c_1$ と $c_1'$ とは1度交




わりかつ互いに横断している．$c_2$ と $c_2'$ についても同様である．しかし $c_1'$ と $c_2'$ とは 1 度交わるだけで横断はしない．Σ 上のどの 1-輪体も $c_i$, $c_i'$ 達の定数倍の和プラス境界になる——という命題が幾何学的にはもっともらしいことを見るために，これらの基本的な輪体に沿って曲面 Σ を切るのである．切った後は，Σ は穴のない平面領域に滑らかに変形されるであろう (次図参照).



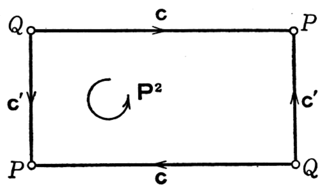

さて De Rham の第 1 定理の保証する所によれば，Σ 上の閉じた 1-形式 $\omega$ に対して，$\omega$ が完全微分になるための必要十分条件は次の通り．

$$\int_{c_1}\omega=\int_{c_1'}\omega=\int_{c_2}\omega=\int_{c_2'}\omega=0.$$

De Rham の第2定理を1次元に適用すれば，次の主張が成り立つ：実数 $a_1$, $a_1'$, $a_2$, $a_2'$ が与えられれば，閉じた1-形式 $\omega$ が存在して次の関係を満足する：

$$\int_{c_1}\omega=a_1,\quad \int_{c_1'}\omega=a_1',\quad \int_{c_2}\omega=a_2,\quad \int_{c_2'}\omega=a_2'.$$

向きづけ不可能な閉曲面を考えるのも興味がある．これらはもちろん $\mathsf{E}^3$ 中には実現できない．恐らく最も簡単なのは**射影平面** $\mathsf{P}^2$ であろう．これは長方形の縁を図示した順に貼りあわせて定義される．

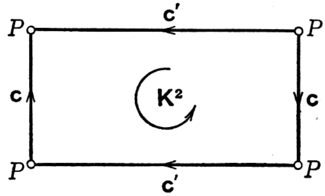



境界関係は次の通り：

$$\partial(\mathsf{P}^2)=2\mathsf{c}'-2\mathsf{c},$$
$$\partial\mathsf{c}=(P)-(Q),$$
$$\partial\mathsf{c}'=(P)-(Q).$$

この意味する所は次のようになる．まず第一に，実は，2-輪体は0以外にない．どの2-形式も閉，しかも完全である．有効な1-輪体は $\mathsf{c}'-\mathsf{c}$ だけであるが，これは実は境界になっている：$\mathsf{c}'-\mathsf{c}=\frac{1}{2}\partial\mathsf{P}^2$．かくして，どの閉じた1-形式も完全である．

もう一つの興味ある例は **Klein の管** $\mathsf{K}^2$ である．定義はやはり長方形の縁を貼り合わせて得られる．



境界関係は次の通り：

$$\partial K^2 = -2c,$$
$$\partial c = \partial c' = 0.$$

独立な 1-輪体は 1 個で，c′ がそれである．

## 5.11　鎖の間の写像

M と N とを多様体，$f$ を滑らかな写像とする：

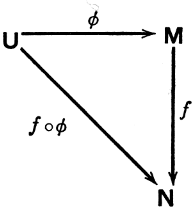
$$f:\ M \to N.$$

すると M 上の各 $p$-鎖 c に対して，自然に N 上に一つの $p$-鎖 $f_*c$ が対応する．

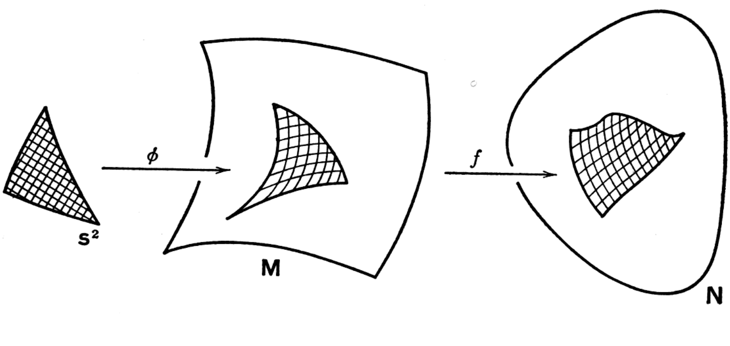
これを説明するには，c が単体 $\sigma^p$ のときをやればよい．そのような単体は $(s^p, U, \phi)$ で表わされる．ここで U は Euclid 単体 $s^p$ の近傍で，$\phi$: U→M である．することは $f$ と $\phi$ との合成写像を作るだけでよい．すると $f_*c$ は

$$(s^p, U, f\circ\phi)$$

で表わされる N の単体として定義される．




この手続きを 2-単体の場合に図示する：



この**誘導写像** $f_*$ は鎖の空間を鎖の空間に写像する：

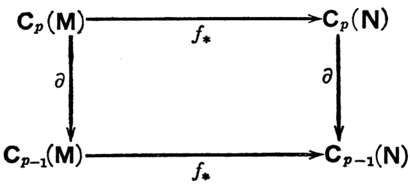
$$\mathsf{M} \underset{f}{\rightarrow} \mathsf{N},$$

$$\mathsf{C}_p(\mathsf{M}) \underset{f_*}{\rightarrow} \mathsf{C}_p(\mathsf{N}).$$

M 上の $p$-鎖 c に対して

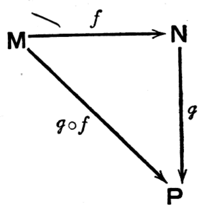
$$f_*(\partial \mathsf{c}) = \partial(f_* \mathsf{c})$$

が成り立つことに注意すれば，次の可換図式を得る．




これは確かに，5.4 節における $f^*$ と $d$ に対する対応図式の類似物になっている．可換性の成立は個々の単体をよく眺めれば証明される．

さて二つの写像があるとき何が起るかを見よう．いま




であれば

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

が成り立つ．これもやはり単体に対して，$f_*$ の定義からほとんど直ちに出る．

最後に次の情況を考えよう．いま

$$f\colon \mathsf{M} \rightarrow \mathsf{N}$$

とし，$\omega$ を N 上の $p$-形式，c を M 上の $p$-鎖とする．すると次の公式が成り立つ．

$$\int_c f^*\omega = \int_{f_*c} \omega.$$

この重要な結果もやはり単体に対しては定義から直ちに出る．和をとれば一般の鎖についてもわかる．

## 5.12 問　　題

**1.** 球面 $S^2$ の単位接ベクトルの全体は3次元多様体をなすことを示せ．局所座標系を構成せよ．

**2.** $E^2$ 中の有向直線の全体は2次元多様体をなすことを示せ．向きづけを論ぜよ．

**3.** 更に一般に，$E^n$ 中の向きのついた $r$ 次元平面全体の集合を考え，これが多様体となることを示し，その次元を求めよ．また向きづけを論ぜよ．

**4.** $n$ 次元射影空間 $P^n$ は次のように定義される．まず全部が0ではないような $(n+1)$ 個の実数の組 $(a_0, \cdots, a_n)$ の全体を考え，互いに比例するような二つの組は $P^n$ の同一の点を表わすと見做すのである．$P^n$ が $n$ 次元多様体をなすことを示せ．

**5.** $n$ 次元複素射影空間 $CP^n$ も次のように定義される．全部が0ではないような $(n+1)$ 個の複素数の組 $(a_0, \cdots, a_n)$ の全体を考え，複素数の比例因子の違いしかない二つの組は $CP^n$ の同一の点を表わすとするのである．$CP^n$ が多様体をなすことを示し，その次元を求めよ．

**6.** 問題4, 5の多様体は閉じている(コンパクトである)ことを証明せよ．

**7.** 問題3の多様体をMとする．$E^n$ 中の向きのついた $r$ 次元平面で，原点を通るようなもの全体のなす集合Nは，Mの閉じた部分多様体となることを示せ．

**8.** $E^n$ 中の次の開領域をUとする：

$$U = \{x_1{}^2 + \cdots + x_n{}^2 > 1\}.$$

$\omega$ は $E^n$ 上の $r$-形式で，U上で恒等的に0とする．いかなる条件の下で，$E^n$ 上の $(r-1)$-形式 $\alpha$ が存在して，U上で恒等的に0となり，しかも $d\alpha = \omega$ を満足するか？

**9.** 直接計算により(すなわち De Rham の定理を使わないで)次のことを示せ．$S^2$ 上の 2-形式 $\omega$ の $S^2$ 上の積分が 0 ならば，$S^2$ 上に適当な 1-形式 $\alpha$ をとれば $\omega=d\alpha$ となる．

# 第 VI 章　Euclid 空間での応用

## 6.1　$\mathrm{E}^n$ の体積要素

$\mathrm{E}^n$ の体積要素である $n$-形式を

$$\omega = dx_1 \cdots dx_n$$

と記す．そして

$$V_n = \int_{r \leqq 1} \omega, \qquad r^2 = \sum x_i^2$$

とおく．従って $V_n$ は単位球の体積である．次に $\sigma'$ で単位球面 $\mathrm{S}^{n-1} = \{x | r=1\}$ 上の $(n-1)$ 次元の体積要素を表わし，

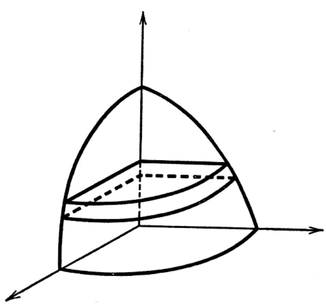
$$A_{n-1} = \int_{\mathrm{S}^{n-1}} \sigma'$$

とおく．かくして $A_1 = 2\pi$, $A_2 = 4\pi$, $V_1 = 2$, $V_2 = \pi$, $V_3 = \frac{4}{3}\pi$ である．明らかに半径 $r$ の球面の体積は $r^{n-1} A_{n-1}$ であるから，

$$V_n = \int_0^1 r^{n-1} A_{n-1} dr = \frac{1}{n} A_{n-1}$$

となる．$V_n$ は球を厚板にわけて積分することによって計算される：

$$V_n = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{(n-1)/2} V_{n-1} dx$$



$$= V_{n-1}J_n,$$

ただしここで

$$J_n = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{(n-1)/2}dx$$

である.

部分積分法により次式が得られる.

$$J_n = \int_{-1}^{1}x(2x)\frac{n-1}{2}(1-x^2)^{(n-3)/2}dx$$
$$= (n-1)(-J_n+J_{n-2}),$$
$$\therefore \quad J_n = \frac{n-1}{n}J_{n-2}.$$

これらの漸化式から次の標準的結果が出る.

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

次に Euclid 座標 $x_1, \cdots, x_n$ を用いて $\sigma'$ を具体的に表わす公式を求める. まず $\mathsf{E}^n$ 中の 1-形式

$$r\,dr = \sum x_i dx_i$$

から始める. これは回転(直交変換)の下で不変である. 従って

$$*\,r\,dr = \sum(-1)^{i-1}x_i dx_1\cdots\widehat{dx_i}\cdots dx_n$$

(帽子の記号 ∧ はその項を省くことを意味する)は $\mathsf{E}^n$ 中の $(n-1)$-形式であって, これも回転の下で不変である. 従って, $\mathsf{S}^{n-1}$ 上では, 定数 $c$ をえらんで

$$\sigma' = c*r\,dr$$

となる.

次に

$$d(*r\,dr) = \sum(-1)^{i-1}dx_i dx_1\cdots\widehat{dx_i}\cdots dx_n = n\omega$$

に注意すれば次式を得る.

$$A_{n-1} = \int_{\mathsf{S}^{n-1}}\sigma' = c\int_{\mathsf{S}^{n-1}}*r\,dr = c\int_{r\leqq 1}d(*r\,dr)$$

$$= c\int_{r\leq 1} n\omega = cnV_n = cA_{n-1}.$$

よって，$c=1$ で，$\mathsf{S}^{n-1}$ 上で $\sigma' = *r\,dr$ となる．

以上をまとめよう．

$$\sigma = *r\,dr = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_n$$

とおいて $\mathsf{E}^n$ 中の $(n-1)$-形式 $\sigma$ を定義すれば $d\sigma = n\omega$ であって，$\sigma$ を $\mathsf{S}^{n-1}$ 上に制限すれば，それは $\mathsf{S}^{n-1}$ の $(n-1)$ 次元の体積要素を表わす微分形式 $\sigma'$ と一致する．

次に自然な射影

$$\pi:\ \mathsf{E}^n - \{0\} \to \mathsf{S}^{n-1}$$

を $\pi(\mathsf{x}) = \dfrac{1}{|\mathsf{x}|}\mathsf{x}$ で定義する．

$\pi^*\sigma'$ を求める．これは $\mathsf{E}^n - \{0\}$ 上の $(n-1)$-形式であって，

$$d(\pi^*\sigma') = 0$$

を満たす．何故なら $d(\pi^*\sigma') = \pi^*(d\sigma') = \pi^*(0) = 0$ だから．($d\sigma'$ は $\mathsf{S}^{n-1}$ 上の $n$-形式だから 0 になる.) さて

$$\pi^*\sigma' = \frac{\sigma}{r^n}$$

なることを証明しよう．これは

$$\sigma' = \sum (-1)^{i-1} y_i dy_1 \cdots \widehat{dy_i} \cdots dy_n$$

の中へ $y_i = x_i/r$ を直接代入しても証明できるけれども，ここに存在する対称性を利用して間接的な手法でやることにする．

$$\tau = \frac{\sigma}{r^n}$$

とおくと，

$$d\tau = \frac{1}{r^n}d\sigma - \frac{n}{r^{n+2}}(r\,dr)\sigma = \frac{n\omega}{r^n} - \frac{nr^2\omega}{r^{n+2}} = 0$$

となる．さて $*(\pi^*\sigma')$ が $\mathsf{E}^n - \{0\}$ 中の 1-形式で回転下で不変，従って $r$ にしか依存しないことに注目すれば，

$$*(\pi^*\sigma')=\frac{f(r)}{r^n}(r\,dr)$$

と書ける．これから次式を得る．

$$\pi^*\sigma'=\frac{f(r)}{r^n}\sigma=f(r)\tau,$$

$$\therefore\quad 0=d(\pi^*\sigma')=\frac{df}{dr}\tau,\qquad \therefore\quad \frac{df}{dr}=0,\qquad \therefore\quad f=c\qquad (\text{定数}).$$

すなわち，$\pi^*\sigma'=c\tau$．$c$ を計算するには，$\mathsf{S}^{n-1}$ 上では $\pi^*\sigma'$ も $\tau$ もつぶれて $\sigma$ になることに注意すれば足りる．よって $c=1$ である：

$$\pi^*\sigma'=\tau.$$

## 6.2 巻き数，写像次数

位相幾何学の基本的結果の一つ (Seifert および Threlfall [20], 283 頁) の保証する所によれば，M と N とが閉じた，向きのついた $n$ 次元多様体で，$f$: M →N ならば，鎖 $f_*$M は N の整数倍プラス境界となる．この整数因子を $f$ の**次数**(degree)といい，deg $f$ と書く．

さて $\Sigma$ を $\mathsf{E}^n-\{0\}$ 中の閉じた，向きのついた $(n-1)$ 次元多様体とする．すると位相幾何学の Jordan-Brouwer の定理により，$\Sigma$ は $\mathsf{E}^n$ をちょうど二つの領域に分割する．$\Sigma$ は外向き法線により向きづけられているとする．6.1 節の射影による写像 $\pi$ は $\Sigma$ を $\mathsf{S}^{n-1}$ 中に写像している．実は deg $\pi=0$ または 1 となるのであるが，これからやる要点は，これが一つの積分により定められるということである．いま $\delta=\deg\pi$ とおく．

すると

$$\int_\Sigma\tau=\int_\Sigma\pi^*\sigma'=\int_{\pi(\Sigma)}\sigma'=\delta\int_{\mathsf{S}^{n-1}}\sigma'=\delta A_{n-1}$$

となるから次式が得られる．

$$\delta=\frac{1}{A_{n-1}}\int_\Sigma\tau.$$

さらに一般に，$\mathsf{M}^{n-1}$ を閉じた，向きづけられた $(n-1)$ 次元多様体とし

$$f\colon\ \mathsf{M}^{n-1}\to\mathsf{E}^n-\{0\}$$

とする．本質的には，$f(\mathsf{M}^{n-1})$ を $\mathsf{E}^n-\{0\}$ の超曲面(自分自身と交わっているかも知れないが)と考えているのである．この超曲面が原点のまわりをぐるぐるととり巻いていると見做して，一体何回とり巻いているかを数えたいのである．この**巻き数**は次の **Kronecker の積分**(Kronecker integral)

$$\frac{1}{A_{n-1}}\int_{\mathsf{M}} f^*\tau$$

で与えられる．これは次のように正当化できよう．$g=\pi\circ f$: $\mathsf{M}^{n-1}\to\mathsf{S}^{n-1}$ とおく．求めるものは $\deg g$ である．さて

$$g_*(\mathsf{M})=(\deg g)\mathsf{S}^{n-1}+(\text{境界})$$

であるから

$$\int_{\mathsf{M}} g^*\sigma'=\int_{g_*\mathsf{M}}\sigma'$$

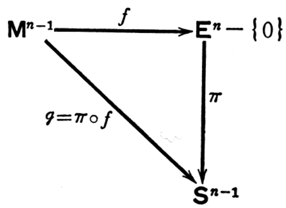
$$=(\deg g)\int_{\mathsf{S}^{n-1}}\sigma'=A_{n-1}\deg g,$$

$$\therefore\quad \deg g=\frac{1}{A_{n-1}}\int_{\mathsf{M}} g^*\sigma'.$$

ところが $g^*\sigma'=(f^*\circ\pi^*)\sigma'=f^*\tau$ であるから

$$\deg g=\frac{1}{A_{n-1}}\int_{\mathsf{M}} f^*\tau$$

を得る．




最も一般な状態は次の場合である．

$$f:\ \mathsf{M}^n\to\mathsf{N}^n.$$

$\beta$ を N 上の体積要素の微分形式で，$\int_{\mathsf{N}}\beta=1$ となるようにとったものとすると

$$\deg f = \int_{\mathrm{M}} f^*\beta$$

となる．何故なら $f_*(\mathrm{M}) = (\deg f)\mathrm{N} +$ (境界) により

$$\int_{\mathrm{M}} f^*\beta = \int_{f_*\mathrm{M}} \beta = (\deg f) \int_{\mathrm{N}} \beta = \deg f.$$

興味ある例を一つ：$\mathrm{T}^n$ を $n$ **次元輪環体**(torus)とし，$f$: $\mathrm{S}^n \to \mathrm{T}^n$(ただし $n \geqq 2$)とすれば，$\deg f = 0$ となる．

いま問題にしている積分は整数値をとるから，考えている写像を連続的に変形しても，積分値は一定である．もっと詳しくいえば，$f_t$: M→N を写像の1パラメーターの族とすると

$$\deg f_t = \int_{\mathrm{M}} f_t^*\beta$$

は $t$ の滑らかな函数で，つねに整数値をとる．よって定数となる．従って $\deg f_0 = \deg f_1$ が出る．さて $f$: $\mathrm{S}^n \to \mathrm{T}^n$ は定数写像に連続的に変形できるのである．

注意をもう一つ：いま

$$f: \mathrm{M} \to \mathrm{N}, \quad g: \mathrm{N} \to \mathrm{P} \quad \text{従って} \quad h = g \circ f: \mathrm{M} \to \mathrm{P}$$

とすれば

$$\deg h = (\deg f) \cdot (\deg g)$$

となる．

### 6.3　Hopf の不変量

各球面 $\mathrm{S}^n$ に対し，$\sigma_n$ を次のように正規化された面積要素とする：

$$\int_{\mathrm{S}^n} \sigma_n = 1.$$

まず写像 $f$: $\mathrm{S}^3 \to \mathrm{S}^2$ について考えると，$f^*\sigma_2$ は $\mathrm{S}^3$ 上の 2-形式になる．そして $d(f^*\sigma_2) = f^*(d\sigma_2) = 0$ である．$\mathrm{S}^3$ は自明なもの，すなわち境界以外に2次元の輪体をもたないから

$$f^*\sigma_2 = d\alpha_1$$

となる $S^3$ 上の 1-形式 $\alpha_1$ がある．$\alpha_1$ は函数の微分の差を除いて一意的である．3-形式 $\alpha_1 \wedge f^*\sigma_2$ に対し積分

$$\int_{S^3} \alpha_1 \wedge f^*\sigma_2$$

が生ずるが，これは整数であるという著しい性質をもっている．この整数を $f$ の **Hopf の不変量**(Hopf invariant)という．これは $f$ の連続変形の下でも不変である．さらに一般に

$$f:\ S^{2n-1} \to S^n$$

のとき，$f^*\sigma_n = d\alpha_{n-1}$ と書け，$f$ の Hopf 不変量は

$$\int_{S^{2n-1}} \alpha_{n-1} \wedge f^*\sigma_n$$

となる．

$S^3$ を複素数の対

$$(z, w), \qquad |z|^2 + |w|^2 = 1$$

で表わすことができるが，そのとき，写像 $(z, w) \to z/w$ が $S^3$ から閉じた複素平面，すなわち Riemann 球面 $S^2$ の中への写像となる．この写像の Hopf 不変量は $+1$ であるから，これは次の意味で**本質的**(essential)である．すなわち，この写像を連続変形しても自明な写像(各点の像が同一の点になるような写像)には直せない．

## 6.4 まつわり数，Gauss の積分，Ampère の法則

$M^r, N^s$ を $E^n$ 中の向きづけられた閉多様体で，$r+s=n-1$，しかも M と N とは共有点をもたないとする．(最良の例：$E^3$ 中にあって共有点のない二つの閉曲線.) M と N とが何回からまりあうかを数えたい．そのため直積空間 $M \times N$ を考える．これは向きづけられた多様体で次元は $r+s=n-1$ である．次式で定義された写像 $f$: $M \times N \to E^n - \{0\}$ を考える：

$$f(x, y) = y - x.$$

そして

$$\operatorname{link}(M, N) = \deg f$$

とおく．これを M と N の**まつわり数**(linking number)という．かくして，上記で考えた $E^n-\{0\}$ 中の $n$-形式 $\tau$ を用いて

$$\mathrm{link}\,(M, N)=\frac{1}{A_{n-1}}\int_{M\times N} f^*\tau=\frac{1}{A_{n-1}}\int_M\int_N f^*\tau$$

となる．これを $E^3$ 中にある閉曲線の対 M, N に対してやり抜こう．まず

$$\tau=\frac{1}{|z|^3}\sum z_i dz_j dz_k=\frac{1}{|z|^3}\frac{(z\times dz)\cdot dz}{2}$$

である．x と y をそれぞれ M と N 上の動点とすれば

$$z=f(x, y)=y-x$$

であるから

$$\begin{aligned}f^*\tau&=\frac{1}{2|y-x|^3}[(y-x)\times(dy-dx)]\cdot(dy-dx)\\&=\frac{1}{2|y-x|^3}\{[-(y-x)\times dy]\cdot dx-[(y-x)\times dx]\cdot dy\}\\&=-\frac{1}{|y-x|^3}[(y-x)\times dy]\cdot dx\end{aligned}$$

となり，従って

$$\mathrm{link}\,(M, N)=\frac{-1}{4\pi}\int_{x\in M} dx\cdot\int_{y\in N}\frac{(y-x)\times dy}{|y-x|^3}$$

を得る．(この計算中で，$dy$ が1変数しか含まないから $dy\times dy=0$ 等々を用いた.)

いま，閉曲線 N のまわりを流れる定常な単位電流を想像しよう．Ampère の法則により，点 x において線分 $dy$ 中の電流にもとづく磁場は次の通り：

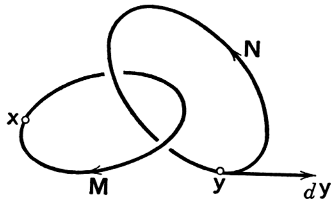
$$-\frac{1}{4\pi}\frac{(y-x)\times dy}{|y-x|^3}.$$

従って，点 x での全磁場は

$$F(x)=-\frac{1}{4\pi}\int_N\frac{(y-x)\times dy}{|y-x|^3}$$

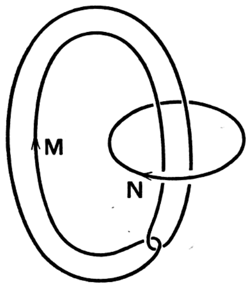
となる．従って

$$\mathrm{link}\,(M, N)=\int_M F(x)\cdot dx$$




は，ちょうど単位磁極が M を一周したときの，上の磁場のなす仕事に等しい．

次の例では link (M, N) = 0 である．これは 2 曲線を本当に離すことができないから，驚くべきものに見えよう．



# 第 VII 章　微分方程式への応用

## 7.1　ポテンシャル論

6.1 節の記号を要約する．空間：$\mathsf{E}^n$．座標 $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

$$r^2 = x_1{}^2 + \cdots + x_n{}^2,$$

$$r\,dr = \sum_1^n x_i dx_i,$$

$$\sigma = *(r\,dr) = \sum_1^n x_i * dx_i = \sum_1^n (-1)^{i-1} x_i dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_n,$$

$$\tau = \frac{\sigma}{r^n},$$

$$\omega = dx_1 \cdots dx_n = \mathsf{E}^n \text{ の体積要素},$$

$$d\sigma = n\omega, \qquad d\tau = 0,$$

$$V_n = \int_{r \leqq 1} \omega = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)}, \qquad A_{n-1} = \int_{r=1} \sigma = n V_n.$$

$u$ を $\mathsf{E}^n$ 中のある領域上で滑らかな函数とすると

$$du = \sum \frac{\partial u}{\partial x^i} dx^i,$$

$$*du = \sum (-1)^{i-1} \frac{\partial u}{\partial x^i} dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n,$$

$$d*du = \left(\sum \frac{\partial^2 u}{\partial x^{i2}}\right)\omega = (\Delta u)\,\omega$$

となる．ただしラプラシアンを

$$\Delta u = \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x^{i2}}$$

で定義した．($n$=3 のときの詳細は 4.4 節参照.)

$u$ と $v$ とが有限領域 R 上の函数ならば，次を **Dirichlet の（双 1 次）積分**という．

$$D[u, v] = \int_R du \wedge *dv = \int_R dv \wedge *du = \int_R \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x^i}\right)\omega.$$

次に Stokes の定理により

$$\int_{\partial R} u * dv = \int_R d(u * dv)$$

を得るが，

$$d(u*dv) = du \wedge *dv + ud*dv$$
$$= du \wedge *dv + u\Delta v\omega$$

であるから，次を得る．

**Green の公式**

$$\int_{\partial R} u * dv = D[u, v] + \int_R u\Delta v\omega.$$

$u$ と $v$ とをとりかえて辺々引けば次を得る．

**Green の対称公式**

$$\int_{\partial R} (u*dv - v*du) = \int_R (u\Delta v - v\Delta u)\,\omega.$$

(通常は $*du = \dfrac{\partial u}{\partial \nu}\lambda$ と書く．ここで $\lambda$ は $\partial R$ 上の $(n-1)$ 次元の体積要素で，$\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ は**法線微係数**(normal derivative)である.)

領域 R で $v$ が調和，すなわち $\Delta v=0$，の場合には

$$\int_{\partial R} (u*dv - v*du) + \int_R v\Delta u\omega = 0$$

を得る．特殊化して次の結果を得る：

**$u$ と $v$ とが領域 R で調和ならば**

$$\int_{\partial R} u * dv = \int_{\partial R} v * du.$$

さらに結果を導くため

$$v = \frac{1}{r^{n-2}},$$

$$dv = \frac{-(n-2)}{r^n}(r\,dr),$$

$$*dv = -(n-2)\tau,$$

$$d*dv = 0, \qquad \Delta v = 0$$

とおく．函数 $v$ は $\mathrm{E}^n-\{0\}$ で定義されている．領域 R は 0 を含むとして，上の公式を，R から原点のまわりをくり抜いた領域

$$\mathrm{R}-\{r \leqq \varepsilon\}$$

に適用する．ただし $\varepsilon$ は小さな正の定数．$u$ は R 全体上で調和とする．

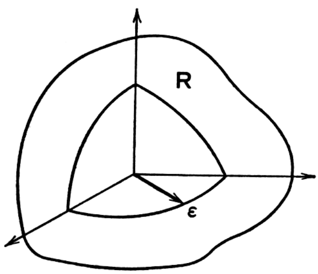
$$\partial[\mathrm{R}-\{r \leqq \varepsilon\}] = \partial\mathrm{R}-\{r=\varepsilon\}$$

であるから次式を得る．

$$\int_{\partial\mathrm{R}} u*dv - \int_{r=\varepsilon} u*dv = \int_{\partial\mathrm{R}} v*du - \int_{r=\varepsilon} v*du,$$

よって

$$-(n-2)\int_{\partial\mathrm{R}} u\tau + (n-2)\int_{r=\varepsilon} u\tau = \int_{\partial\mathrm{R}} \frac{1}{r^{n-2}}*du - \int_{r=\varepsilon} \frac{1}{r^{n-2}}*du.$$




ここで個々の項を計算する．

$$\int_{r=\varepsilon} u\tau = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{r=\varepsilon} u\sigma = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{r\leqq\varepsilon} d(u\sigma) = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{r\leqq\varepsilon} (du\wedge\sigma + u\cdot n\omega).$$

さて $|\mathrm{x}|\leqq\varepsilon$ に対して $u(\mathrm{x}) = u(0)+O(\varepsilon)$ であるから

$$\int_{r\leqq\varepsilon} n\omega = u(0)\,V_n + O(\varepsilon)\varepsilon^n.$$

同様に

$$\int_{r\leqq\varepsilon} du\wedge\sigma = \int_{r\leqq\varepsilon}\left(\sum \frac{\partial u}{\partial x^i}x^i\right)\omega = \int_{r\leqq\varepsilon} O(\varepsilon)\,\omega = O(\varepsilon)\varepsilon^n,$$

よって

$$\int_{r=\varepsilon} u\tau = nV_n u(0) + O(\varepsilon) = A_{n-1}u(0) + O(\varepsilon).$$

次に

$$\int_{r=\varepsilon} \frac{1}{r^{n-2}} *du = \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \int_{r=\varepsilon} *du = \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \int_{r\leqq\varepsilon} d(*du)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \int_{r\leqq\varepsilon} (\Delta u)\,\omega = 0.$$

これらの結果を代入して，$\varepsilon\to 0$ ならしめれば

$$u(0) = \frac{1}{A_{n-1}} \int_{\partial R} u\tau + \frac{1}{(n-2)A_{n-1}} \int_{\partial R} \frac{*du}{r^{n-2}}$$

を得る．これは調和函数の 1 点での値をその境界値と法線微係数を用いて表わす式である．

**特別な場合**　$R$ を中心 0，半径 $a$ の球状領域とする：$R = \{r \leqq a\}$．この場合には右辺第 2 項は消える．（$\{r=\varepsilon\}$ にとった積分が消えたのと同じ理由で．）$\partial R = \{r=a\}$ 上では

$$\tau = \frac{\sigma}{a^n} = \frac{1}{a^{n-1}}\mu$$

となる．ただしここで

$$\mu = \mu_x = \frac{1}{a} \sum (-1)^{i-1} x_i dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_n$$

は，$\{r=a\}$ 上の $(n-1)$ 次元体積要素である．（$a=1$ に対してはこれは $\sigma$ に帰着する．分子には $n$ 個の $x$ の項があり，$a=|x|$ が分母にあるから，これは正しい次数 $n-1$ の同次函数である．）かくして次を得る．

**Gauss の平均値定理**

$$u(0) = \frac{1}{a^{n-1}A_{n-1}} \int_{r=a} u\mu = \frac{\int_{r=a} u\mu}{\int_{r=a} \mu}.$$

この定理は，調和函数 $u$ の半径 $a$ の球面上の平均値が，$u$ の中心での値に等しいことを述べている．

この結果から調和函数に対して二つの重要な性質が出る.

**最大(最小)原理**　有限領域 R で調和な函数 $u$ は, 定数でない限り, その最大値(最小値)を決して R の内点でとることはない.

何故ならば, $u$ が R の内点 $x_0$ で最大値をとったとする. その点は座標を平行移動すれば原点 0 にとってもよい. $\Sigma$ を中心 0, 半径 $a$ の $(n-1)$ 次元球面とする. ただし $a$ を十分小さくとって $\{r\leqq a\}$ は R 中に含まれるとする. $u(x)\leqq u(0)$ により

$$u(0)=\int_\Sigma u\mu\Big/\int_\Sigma\mu\leqq\int_\Sigma u(0)\mu\Big/\int_\Sigma\mu=u(0)$$

を得る. よって $\Sigma$ 上のあらゆる x に対して $u(x)=u(0)$ が成立せねばならない. よって, $u$ は R 中にとれる $x_0$ の最大の球状近傍上で定数である. 明らかにこれは $u$ が R 全体で定数なることを意味する. 何故なら, 他の任意の内点にそのような球の列(互いに重なり合うような)によって到達できるからである. 最小値の場合も同様.

**境界値問題に対する一意性原理**　$u$ と $v$ とが有限領域 R で調和で, $\partial$R 上で一致すれば, R 上で $u=v$.

何故なら $u-v$ は $\partial$R 上で 0 でしかも調和であるから, 最大値原理により R 上で $u-v\leqq 0$. すなわち $u\leqq v$. 同様に $v\leqq u$ を得るから $u=v$.

函数 $(1/r^{n-2})$ は球面に理想的に適合している. 他の領域上では, 上の $u(0)$ の表示式中にある法線微係数を含む項のおかげで, これは不便である. そこで Green 函数なるものを導入する.

R を有限領域とする. R の異なる 2 点 x と y とに対して定義された函数 $v(x, y)$ が次の 3 条件を満たすとき, これを R の **Green 函数**(Green's function)という.

(i)　R 中に固定した各 y に対して, $v(x, y)$ は R$-\{y\}$ 中にある x に対して, x の調和函数である.

(ii)　R 中に固定した各 y に対して, $\partial$R 中の x に対して $v(x, y)=0$.

(iii)　R 中に固定した各 y に対して,

$$v(\mathrm{x},\mathrm{y})-\frac{1}{|\mathrm{x}-\mathrm{y}|^{n-2}}$$

は R 全体で滑らかな調和函数.

上と同じ方法を用いて次のことが証明される:

**$u$ を有限領域 R 上の任意の調和函数とし, $v(\mathrm{x},\mathrm{y})$ を R の Green 函数とすれば**

$$u(\mathrm{y})=\frac{-1}{(n-2)A_{n-1}}\int_{\partial\mathrm{R}}u(\mathrm{x})*d_{\mathrm{x}}v(\mathrm{x},\mathrm{y})$$

**が成り立つ**

R が中心 0 の球状領域 $r\leqq a$ のときは, Green 函数は次の通り:

$$v(\mathrm{x},\mathrm{y})=\frac{1}{|\mathrm{x}-\mathrm{y}|^{n-2}}-\frac{a^{n-2}}{|\mathrm{y}|^{n-2}\left|\mathrm{x}-\dfrac{a^2}{|\mathrm{y}|^2}\mathrm{y}\right|^{n-2}}.$$

次のことに注意する.

$$\mathrm{y}'=\frac{a^2}{|\mathrm{y}|^2}\mathrm{y}$$

は, 球 R に関する y の鏡像点(反転した点)である. ∂R 上にある x については $|\mathrm{x}|=a$ だから, 次を得る.

$$|\mathrm{x}-\mathrm{y}'|^2=(\mathrm{x}-\mathrm{y}')\cdot(\mathrm{x}-\mathrm{y}')=a^2-2\frac{a^2}{|\mathrm{y}|^2}\mathrm{x}\cdot\mathrm{y}+\frac{a^4}{|\mathrm{y}|^2}$$

$$=\frac{a^2}{|\mathrm{y}|^2}(|\mathrm{y}|^2-2\mathrm{x}\cdot\mathrm{y}+|\mathrm{x}|^2)=\frac{a^2}{|\mathrm{y}|^2}|\mathrm{x}-\mathrm{y}|^2,$$

$$\therefore\quad |\mathrm{x}-\mathrm{y}'|=\frac{a}{|\mathrm{y}|}|\mathrm{x}-\mathrm{y}|.$$

これで, 何故 x が ∂R 上にあるとき $v$ が消えるかがわかる.

次に

$$*d_{\mathrm{x}}v=-(n-2)\left[\tau(\mathrm{x}-\mathrm{y})-\frac{a^{n-2}}{|\mathrm{y}|^{n-2}}(\mathrm{x}-\mathrm{y}')\right]$$

となる. ここで

$$\tau(\mathrm{x}-\mathrm{y})=\frac{1}{|\mathrm{x}-\mathrm{y}|^n}\sum(x_i-y_i)*dx_i,$$

$$\tau(\mathrm{x}-\mathrm{y}')=\frac{1}{|\mathrm{x}-\mathrm{y}'|^n}\sum(x_i-y_i')*dx_i.$$

$\partial R$ 上の x に対してだけ $dv$ がわかればよい．$|\mathrm{x}|=a$ に対して，$\mathrm{y}'=\dfrac{a^2}{|\mathrm{y}|^2}\mathrm{y}$ を想起して，次式を得る．

$$*d_{\mathrm{x}}v|_{|\mathrm{x}|=a}=\frac{-(n-2)}{|\mathrm{x}-\mathrm{y}|^n}\sum\left[(x_i-y_i)-\frac{|\mathrm{y}|^2}{a^2}\left(x_i-\frac{a^2}{|\mathrm{y}|^2}y_i\right)\right]*dx_i$$

$$=\frac{-(n-2)}{|\mathrm{x}-\mathrm{y}|^n}\frac{a^2-|\mathrm{y}|^2}{a^2}\sigma=\frac{-(n-2)}{|\mathrm{x}-\mathrm{y}|^n}\frac{a^2-|\mathrm{y}|^2}{a}\mu_{\mathrm{x}}.$$

従って，$u$ の境界値による表示式は次のように特殊な形をとる．

$$u(\mathrm{y})=\frac{a^2-|\mathrm{y}|^2}{aA_{n-1}}\int_{|\mathrm{x}|=a}\frac{u(\mathrm{x})}{|\mathrm{x}-\mathrm{y}|^n}\mu_{\mathrm{x}}.$$

これが **Poisson の積分公式**であって，球面上の Dirichlet 問題——すなわち与えられた境界値をもつ調和函数を見出せという問題——に対して，具体的な解の公式を与えるものである．

一般の有限領域に戻って，重要な Green 函数の対称性を挙げておく：

$$v(\mathrm{x},\mathrm{y})=v(\mathrm{y},\mathrm{x}).$$

(球面の場合にこれが成立していることは，上記の非対称な公式からは明らかではない．しかし第 2 項の分母に対して

$$|\mathrm{y}|^2|\mathrm{x}-\mathrm{y}'|^2=|\mathrm{y}|^2(\mathrm{x}-\mathrm{y}')\cdot(\mathrm{x}-\mathrm{y}')=|\mathrm{y}|^2\left(|\mathrm{x}|^2-2\frac{a^2}{|\mathrm{y}|^2}(\mathrm{x}\cdot\mathrm{y})+\frac{a^4}{|\mathrm{y}|^2}\right)$$

$$=|\mathrm{x}|^2|\mathrm{y}|^2-2a^2(\mathrm{x}\cdot\mathrm{y})+a^4$$

となるから，結局対称性がわかるのである.)

Poisson の積分公式から出る多くの重要な帰結の一つは次の定理である．

**Liouville の定理**　$u$ が $E^n$ 全体の上で調和函数であり，しかも $u\geqq 0$ ならば，$u$ は定数である．

$E^n$ 中の各 y に対して，$u(\mathrm{y})=u(0)$ を示そう．$|\mathrm{y}|=b$ なる y を固定し，$a>b$ なる任意の $a$ を選べば，

$$u(\mathrm{y})=\frac{a^2-b^2}{aA_{n-1}}\int_{|\mathrm{x}|=a}\frac{u(\mathrm{x})}{|\mathrm{x}-\mathrm{y}|^n}\mu_{\mathrm{x}}$$

である．さて

$$|\mathrm{x}+\mathrm{y}| \leqq |\mathrm{x}|+|\mathrm{y}| = a+b,$$
$$|\mathrm{x}-\mathrm{y}| \geqq |\mathrm{x}|-|\mathrm{y}| = a-b$$

であるから

$$\frac{1}{(a+b)^n} \leqq \frac{1}{|\mathrm{x}-\mathrm{y}|^n} \leqq \frac{1}{(a-b)^n}$$

である．$u(\mathrm{x}) \geqq 0$ であるから，これらの不等式を用いて次の積分の評価ができる：

$$\frac{(a^2-b^2)}{aA_{n-1}(a+b)^n}\int_{|\mathrm{x}|=a} u(\mathrm{x})\,\mu_{\mathrm{x}} \leqq u(\mathrm{y}) \leqq \frac{(a^2-b^2)}{aA_{n-1}(a-b)^n}\int_{|\mathrm{x}|=a} u(\mathrm{x})\,\mu_{\mathrm{x}}.$$

一方平均値の定理によって

$$\int_{|\mathrm{x}|=a} u(\mathrm{x})\,\mu_{\mathrm{x}} = (a^{n-1}A_{n-1})\cdot u(0)$$

であるから，結局次式を得る．

$$\frac{(a^2-b^2)\,a^{n-2}}{(a+b)^n}u(0) \leqq u(\mathrm{y}) \leqq \frac{(a^2-b^2)\,a^{n-2}}{(a-b)^n}u(0).$$

$a\to\infty$ ならしめれば

$$u(0) \leqq u(\mathrm{y}) \leqq u(0)$$

を得る．従って各 $\mathrm{y}$ に対し $u(\mathrm{y})=u(0)$ となり $u$ は定数である．

**注意 1** Green の対称公式

$$\int_{\partial R}(u * dv - v * du) = \int_{\mathrm{R}}(u\Delta v - v\Delta u)\,\omega$$

に戻り，これを次の情況下で適用する．

$\mathrm{R}=\{\varepsilon\leqq r\leqq a\}$.

$v$ はあらゆる $\varepsilon>0$ に対し R で調和函数.

$v$ は $r=a$ 上で 0 となる.

$u$ は $\{r\leqq a\}$ において滑らか.

$u$ が調和函数とは‘要求しない’のである．上の公式は次のようになる．

$$\int_{r=a} u * dv - \int_{r=\varepsilon} u * dv + \int_{r=\varepsilon} v * du + \int_{\varepsilon\leqq r\leqq a} v(\Delta u)\,\omega = 0.$$

第1の場合

$$v = \frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{a^{n-2}},$$

$$* dv = -(n-2)\tau.$$

上記の方法により

$$\int_{r=\varepsilon} u * dv = \frac{-(n-2)}{\varepsilon^n}\int_{r=\varepsilon} u\sigma = -(n-2)A_{n-1}u(0) + O(\varepsilon),$$

$$\int_{r=\varepsilon} v * du = \left(\frac{1}{\varepsilon^{n-2}} - \frac{1}{a^{n-2}}\right)\int_{r\leqq\varepsilon} d(*du) = O(\varepsilon^2)$$

となる．これらを代入して，$\varepsilon\to 0$ ならしめれば次式を得る．

$$u(0) = \frac{1}{a^{n-1}A_{n-1}}\int_{r=a} u\mu_{\mathrm{x}} - \frac{1}{(n-2)A_{n-1}}\int_{r\leqq a}\left(\frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{a^{n-2}}\right)(\Delta u)\,\omega.$$

これは，Poisson 方程式 $\Delta u = f$ の解 $u$ であって，指定された境界値をもつものについての情報を与えている．

第2の場合

$$v = \frac{x_i}{r^n} - \frac{x_i}{a^n},$$

$$* dv = \left(\frac{1}{r^n} - \frac{1}{a^n}\right) * dx_i - n\frac{x_i}{r^{n+2}}\sigma.$$

微分して $\Delta v = 0$ がわかる．これはまた次式に注意しても得られる．

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) = \frac{-(n-2)}{r^n}x_i.$$

いまの場合の最後の結果は次のようになる．

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_0 = \frac{n}{a^{n+1}A_{n-1}}\int_{r=a} x_i u\mu - \frac{1}{A_{n-1}}\int_{r\leqq a} x_i\left(\frac{1}{r^n} - \frac{1}{a^n}\right)(\Delta u)\,\omega.$$

高階の微分係数についても類似の公式が可能である．

**注意 2**　われわれは $n=2$ の場合を避けて来たが，この場合の基本的な相異は，0 に特異点をもつ対称調和函数が，$r^{-(n-2)}$ ではなくて，$\ln r$ $(=\log r)$ であるということである．これを用いれば，上記と同様な結果が導かれる．

## 7.2 熱方程式

次の放物型の偏微分方程式を考える.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial u}{\partial t}.$$

$u$ が解であるとし, これが, $x, y, t$ 空間中のある領域で成り立つとし, しかもその領域は, 領域 R およびその境界を含んでいるものとする.

まず

$$\alpha=(u_x dy-u_y dx)\,dt-u\,dxdy$$

を考えれば,

$$d\alpha=(u_{xx}+u_{yy})\,dxdydt-u_t dtdxdy=0$$

となる. 従って

$$\int_{\partial R}\alpha=\int_R d\alpha=0$$

である.

次に

$$\beta=2u(u_x dy-u_y dx)\,dt-u^2 dxdy$$

を考えれば

$$\begin{aligned}d\beta&=2(u_x dx+u_y dy)(u_x dy-u_y dx)\,dt\\&\quad+2u(u_{xx}+u_{yy})\,dxdydt-2uu_t dtdxdy\\&=2({u_x}^2+{u_y}^2)\,dxdydt\end{aligned}$$

となる. 従って

$$\int_{\partial R}[2u(u_x dy-u_y dx(dt-u^2 dxdy]=2\int_R({u_x}^2+{u_y}^2)\,dxdydt$$

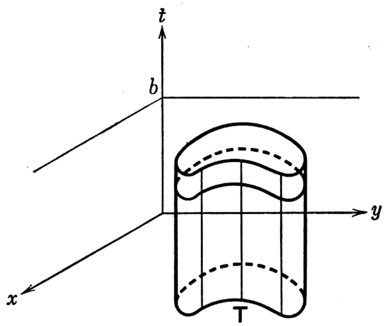
となる.

R を特に柱状領域: $T\times[0,b]$ にとってみよう. ここで T は $x, y$ 平面中の領域である. すると R の境界は

$$\partial R=(\partial T)\times[0,b]+T\times\{b\}-T\times\{0\}$$

となる.

さて, 次の基本的な一意性定理を確立しよう.




**$u$ が底面 $\mathrm{T}\times\{0\}$ と，側面 $\partial\mathrm{T}\times[0, b]$ 上で 0 になれば，$u$ は R において恒等的に 0 になる．**

何故ならば，このとき上の積分の式は次のものに帰着してしまう．

$$2\int_{\mathrm{R}}(u_x{}^2+u_y{}^2)\,dxdydt+\int_{\mathrm{T}}u(x, y, b)^2dxdy = 0.$$

積分下の函数はみな正だから，これから

$$\begin{cases} u_x = u_y = 0 & (\mathrm{R}\ \text{において}), \\ u = 0 & (\mathrm{T}\times\{b\}\ \text{上で}) \end{cases}$$

が出る．これは R において $u=0$ を導くには十分以上である(そのとき $\partial u/\partial t=\partial^2u/\partial x^2+\partial^2u/\partial y^2$ も 0 になるから)．熱方程式は線型であるから，二つの温度分布が，初期値 $t=0$ において一致し，R の境界上でつねに一致するならば，あらゆる $t$ に対して，R の各点で同一とならねばならないことがわかる．

さて同じことを $n$ 次元で行なう．こんどは興味のある符号変化が生ずるのである．変数は $x_1, \cdots, x_n, t$ で，熱方程式は

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

である．ここでいつものように，$\Delta u=\sum \partial^2u/\partial x_i{}^2$ である．作用素 $*$ は空間変数についてのみ適用するものとする．

こんどは次のようにおく．

$$\beta = 2u(*du)dt+(-1)^{n-1}u^2\omega,$$

ただし $\omega=dx_1\cdots dx_n$ である．さて

$$du\wedge(*du)=(\mathrm{grad}\,u)^2\omega=\sum\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\omega$$

であるから，次式を得る．

$$\begin{aligned}d\beta&=2(\mathrm{grad}\,u)^2\omega\,dt+2u(\Delta u)\,\omega\,dt+2(-1)^{n-1}uu_t dt\omega\\&=2(\mathrm{grad}\,u)^2\omega\,dt.\end{aligned}$$

従って

$$\int_{\partial\mathsf{R}}\beta=2\int_{\mathsf{R}}(\mathrm{grad}\,u)^2\omega\,dt$$

となる．いま T を $\mathsf{E}^n$ 中の領域とし，$\mathsf{R}=\mathsf{T}\times[0,b]$ とすれば

$$\begin{aligned}\partial\mathsf{R}&=\partial\mathsf{T}\times[0,b]+(-1)^n\mathsf{T}\times\partial[0,b]\\&=\partial\mathsf{T}\times[0,b]+(-1)^n\mathsf{T}\times b+(-1)^{n-1}\mathsf{T}\times 0\end{aligned}$$

である．$u$ が $\partial\mathsf{T}\times[0,b]$ および $\mathsf{T}\times 0$ 上で 0 になるとすれば，$\mathsf{T}\times b$ 上では ($t=b=$定数，だから) $dt=0$ となるから，次式を得る．

$$\int_{\partial\mathsf{R}}u*du dt=0.$$

従って

$$(-1)^{n-1}\int_{\partial\mathsf{R}}u^2\omega=2\int_{\mathsf{R}}(\mathrm{grad}\,u)^2\omega\,dt,$$

すなわち

$$\int_{\mathsf{T}\times b}u^2\omega+2\int_{\mathsf{R}}(\mathrm{grad}\,u)^2\omega\,dt=0$$

となる．よって前のように，$(\mathrm{grad}\,u)^2=\sum(\partial u/\partial x_i)^2=0$ (R 上で)が結論され，R 上で $\partial u/\partial x_i=0$ となり，$u$ は R 上で定数になり，$u=0$ となる．

## 7.3 Frobenius の積分定理†

本節では一切のことは局所的である．$\mathsf{E}^n$ 中の 0 の近傍で考える．$\omega$ を，0 で

† 本節および次節の材料は，University of California Technical Report of June 1957, *Seminar on exterior differential forms* からとった．これは U. S. Army Office of Ordnance Research Contract DA-04-200-ORD-456 のために準備したものである．

消えない 1-形式とする．如何なる条件の下で，$\omega=f\,dg$ を満たす函数 $f, g$ が存在するか？　ということを問題にしよう．換言すれば，微分方程式 $\omega=0$ に対する**積分因子**を求めようというのである．もし $\omega=f\,dg$ となれば，$f$ は 0 のある近傍で 0 にならないから，

$$d\omega = df\wedge dg = df\wedge f^{-1}\omega,$$

$$d\omega = \theta\wedge\omega \qquad (\theta=f^{-1}df=d\ln|f|)$$

となる．従って，

$$\omega\wedge d\omega = \omega\wedge\theta\wedge\omega = 0$$

となる．$\omega$ が $\mathsf{E}^3$ 中の 1-形式 $\omega=P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ ならば，この条件は，次の式に他ならない．

$$P(R_y-Q_z)+Q(P_z-R_x)+R(Q_x-P_y) = 0.$$

$\omega=f\,dg$ ならば，方程式 $\omega=0$ と $dg=0$ とは同じことになり，従って，$\omega=0$ の解，すなわち積分曲面族は，$g=$定数，で与えられる超曲面族であることを注意しておく．

正確な叙述に移る前に，二つの教訓的な実例を与えよう．

**例 1**　$\omega=yz\,dx+xz\,dy+dz$ とする．従って $d\omega=y\,dzdx+x\,dzdy$ となる．従って，

$$d\omega = \left(\frac{dz}{z}\right)\wedge\omega$$

となる．しかし，これはあまり役に立たない．$dz/z$ が $z$ 軸に沿って特異点をもっているからである．もっとよい選び方は $\theta=-y\,dx-x\,dy$ である．そのとき $d\omega=\theta\wedge\omega$ となっている．函数 $g$ を決めるために，次の事実を使う．各積分曲面 $g=$定数，と平面 $\{x=at,\ y=bt\}$ との交線として生ずる曲線が $z$ 軸と交わる所は，方程式 $g(0,0,z)=$定数，の解 $z$ においてである．平面 $x=at,\ y=bt$ 上では，方程式 $\omega=0$ は

$$dz+2abzt\,dt = 0$$

となり，次の初期条件 $z(0)=c$ を満たす解をもつ：

$$z = c\exp(-abt^2).$$

しかるに $abt^2=xy$ であるから，これらの曲線群が張る曲面は

$$z = ce^{-xy}$$

である．

いま，$a, b, c$ を変数と思って，次の変換を行なう．

$$\begin{cases} x = a, \\ y = b, \\ z = ce^{-ab}. \end{cases} \qquad \text{従って} \ \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = e^{-ab} \neq 0,$$

すると，

$$dz = e^{-ab}dc - z(a\,db + b\,da)$$

だから

$$\omega = e^{-ab}dc$$

を得る．もとの変数に戻れば，

$$\omega = e^{-xy}d(ze^{xy})$$

を得る．そして積分曲面群が

$$ze^{xy} = \text{定数}$$

で与えられることがわかる．函数 $g$ を調節して，曲面 $g=c$ と $z$ 軸の交点が，ちょうど $z=c$ となるようにしたことが看取れるであろう．

**例2** こんどは $\omega=dz-y\,dx-dy$ を扱ってみよう．平面 $x=at,\ y=bt$ 上では方程式 $\omega=0$ は $dz=(abt+b)\,dt$ となり，$z=\frac{1}{2}abt^2+bt+c$ を得るから，次の曲面に達する．

$$z = \frac{1}{2}xy + y + c.$$

しかし，一方放物柱 $x=at,\ y=bt^2$ の上では

$$dz = (abt^2+2bt)\,dt, \qquad z = \frac{1}{3}abt^3+bt^2+c,$$

$$z = \frac{1}{3}xy+y+c$$

を得る．これは上のとは異なる曲面群である．かくして積分曲面を得ることは失敗に帰したのであるが，その理由は，

$$d\omega = -dydx, \qquad \omega \wedge d\omega = -dzdydx \neq 0$$

からわかる．

**定理**　1-形式 $\omega=\sum f_i dx^i$ が原点 $O$ で 0 にならないとし，しかも $d\omega=\theta\wedge\omega$ を満足する 1-形式 $\theta$ が存在するものと仮定する．すると，原点 $O$ の十分小さい近傍において函数 $f$ と $g$ とが存在して，$\omega=f\,dg$ を満足する．

**註 1**　$\omega$ は与えられているが，$\theta$ は確かに一意確定ではない．だから $\theta$ の具体的使用をできるだけ避ければ，証明がより簡単化される．

**註 2**　$\omega$ に対する条件は，$\omega$ を函数倍でおきかえても変らない．実際，$h\neq 0$ ならば

$$d(h\omega) = dh\wedge\omega+h\,d\omega = dh\wedge\omega+h\theta\wedge\omega = (dh+h\theta)\wedge\omega,$$

すなわち

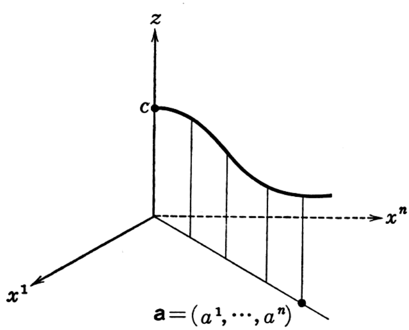
$$d(h\omega) = [(dh)h^{-1}+\theta](h\omega)$$

となるからである．

**証明**　原点 $O$ で $\omega\neq 0$ だから，函数 $f_i$ 達のあるものは原点で 0 にならない．$\omega$ に 0 でない函数を掛けても，仮設も終結も変らないから，

$$\omega = dz-\sum_1^n A_i dx^i, \qquad A_i = A_i(\mathsf{x}, z)$$

としてよい．




x-空間中に任意に点 a をとってこれを固定する．そして超平面 $x^i=a^i t$ $(i=1,\cdots,n)$ 上で方程式 $\omega=0$ を考察する：

$$\frac{dz}{dt} = \sum A_i(\mathsf{a}t, z)a^i.$$

この方程式を初期条件 $z(0)=c$ で解く．もっと正確にいえば，

$$\begin{cases} F_t(t, \mathsf{a}, c) = \sum A_i[\mathsf{a}t, F(t, \mathsf{a}, c)]a^i, \\ F(0, \mathsf{a}, c) = c \end{cases}$$

を満足するような函数 $F(t, \mathsf{a}, c)$ を求める．常微分方程式の通常の存在定理により解が一意的に得られる．ここでスケールの変化が可能であること：

$$F(t, \mathsf{a}, c) = F\left(kt, \frac{1}{k}\mathsf{a}, c\right)$$

がわかる．何故なら右辺も同じ微分方程式の解だからである．特に，$k=1/t$ とおいて

$$F(t, \mathsf{a}, c) = F(1, t\mathsf{a}, c)$$

となる．変数変換

$$\begin{cases} \mathsf{x} = \mathsf{u}, \\ z = F(1, \mathsf{u}, v) \end{cases}$$

を考えると，

$$\left.\frac{\partial(\mathsf{x}, z)}{\partial(\mathsf{u}, v)}\right|_0 = \begin{vmatrix} I & 0 \\ * & 1 \end{vmatrix} = 1$$

である．何故なら

$$\left.\frac{\partial}{\partial v}F(1, \mathsf{u}, v)\right|_0 = \left.\frac{d}{dv}F(1, 0, v)\right|_{v=0} = \left.\frac{d}{dv}F(0, \mathsf{a}, v)\right|_{v=0}$$
$$= \left.\frac{dv}{dv}\right|_{v=0} = 1$$

だから．かくして，新変数 $\mathsf{u}, v$ は原点 $O$ の十分小さい近傍において局所座標系をなす．この座標に関して

$$\omega = \sum P_i du^i + B\,dv, \qquad P_i = P_i(\mathsf{u}, v), \qquad B = B(\mathsf{u}, v)$$

となるとしよう．$\omega$ は $\mathsf{u}=\mathsf{a}t$, $v=$定数，において恒等的に 0 になるから，関係式

$$\sum P_i(\mathsf{a}t, v)a^i = 0$$

を得る．

さらに続けるために，$(t, \mathsf{a}, v)$-空間から $(\mathsf{u}, v)$-空間への写像 $\phi$:

$$\phi(t, \mathsf{a}, v) = (t\mathsf{a}, v) = (\mathsf{u}, v)$$

を考える．すると

$$\phi^*\omega = \sum P_i(t\mathrm{a}, v)(a^i dt + t\, da^i) + B(t\mathrm{a}, v)\, dv$$
$$= \sum tP_i(t\mathrm{a}, v)\, da^i + B(t\mathrm{a}, v)\, dv,$$

すなわち

$$\phi^*\omega = \sum \bar{P}_i(t, \mathrm{a}, v)\, da^i + \bar{B}(t, \mathrm{a}, v)\, dv$$

を得る．ここで，$\bar{P}_i(t, \mathrm{a}, v) = tP_i(t\mathrm{a}, v)$ である．従って，$\bar{P}_i(0, \mathrm{a}, v) = 0$ である．重要な点は，$\phi^*\omega$ が $dt$ を含んでいないということである．

方程式 $d\omega = \theta \wedge \omega$ から，$d(\phi^*\omega) = (\phi^*\theta) \wedge (\phi^*\omega)$ が出る．

$$\phi^*\theta = H(t, \mathrm{a}, v)\, dt + (\text{その他の項})$$

とおいてよい．すると

$$d(\phi^*\omega) = \sum \frac{\partial \bar{P}_i}{\partial t} dt da^i + (\text{その他の項})$$

となる．ここで $dt da^i$ の項を $d(\phi^*\omega)$, $(\phi^*\theta) \wedge (\phi^*\omega)$ で比較して，

$$\frac{\partial \bar{P}_i}{\partial t} = H\bar{P}_i$$

を得る．しかしこれと $\bar{P}_i(0, \mathrm{a}, v) = 0$ とを考慮すれば，常微分方程式の解の一意性によって，$\bar{P}_i = 0$ を得る．従って $P_i = 0$ となり，求める結果

$$\omega = B\, dv$$

を得る．

**参考文献**　この問題および以下に述べるその一般化については É. Cartan [9], 46 頁および [7], 367 頁を見よ．

**例**　$\omega = x\, dy - y\, dx$. 確かに $\omega \wedge d\omega = 0$ である($\omega \wedge d\omega$ は 3-形式だから)．しかしながら，微分形式 $\omega$ は原点で 0 になる．従って，$\omega = 0$ の積分曲線群が原点の近傍を一様に張る(埋めつくす)ことは期待されない．実際，これら積分曲線群は原点を通る直線群 $ax + by = 0$ である．しかしながら，原点のどんな近傍においても $d\omega = \theta \wedge \omega$ は不可能であることを注意しよう．何故ならば，$d\omega = 2\, dxdy$ だから，もし $\theta = A\, dx + B\, dy$ ならば，$2 = Ax + By$ となるが，これは $x = y = 0$ では成立していないからである．

**注意**　定理から容易に，$d\omega = 0$ を満たす 1-形式 $\omega$ が完全であることが再び

導かれる．何故なら，$\omega$ を x-空間の微分形式として $\theta=dz-\omega$ を考えれば $d\theta=0$．従って1パラメーターの積分曲面群 $z=F(\mathrm{x},c)$，$F(0,c)=c$ が存在する．$c$ の各選定に対して，$\theta$ は $z=F(\mathrm{x},c)$ 上で0になる．すなわち，$\omega=dF$ である．($\omega$ は原点で0になるかも知れないから，次元をもう一つ高めて扱わざるを得ないのである．) 未知函数に対して，新しく独立変数を導入するのは有用なトリックである．

さて一般の問題に移る．$\omega^1,\cdots,\omega^r$ を $(r+s)$-空間の1-形式とし，原点 $O$ で1次独立とする．$\Omega=\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^r$ とおく．次の補題の条件達の任意の一つが満たされるとき，系 $\{\omega^1,\cdots,\omega^r\}$ は**完全積分可能** (completely integrable) という．

**補題** 次の諸条件は互いに同値である．

(i) 1-形式の系 $\theta^i{}_j$ が存在して

$$d\omega^i=\sum_{j=1}^{n}\theta^i{}_j\wedge\omega^j \qquad (i=1,\cdots,r\,;\ n=r+s)$$

を満たす．

(ii) $d\omega^i\wedge\Omega=0 \qquad (i=1,\cdots,r)$.

(iii) 1-形式 $\lambda$ が存在して

$$d\Omega=\lambda\wedge\Omega.$$

**証明** (i)⇒(ii) は明らかである．(i)⇒(iii) は，$\lambda=\sum\theta^i{}_i$ とおけばわかる．(iii)⇒(ii) は次の通り：(iii) は

$$\begin{aligned}\sum(-1)^{i-1}d\omega^i\wedge\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^{i-1}\wedge\omega^{i+1}\wedge\cdots\wedge\omega^r\\ =\lambda\wedge\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^r\end{aligned}$$

を意味するから，両辺に $\omega^i$ を掛けさえすればよい．

残っているのは (ii)⇒(i) である．1-形式 $\omega^{r+1},\cdots,\omega^n$ $(n=r+s)$ をとって，$\omega^1,\cdots,\omega^n$ が1-形式全体の基底をなすようにする．

$$d\omega^i=\sum_{j<k}f^i{}_{jk}\omega^j\wedge\omega^k$$

とおけば，$d\omega^i\wedge\Omega=0$ であるから，

$$\sum_{r<j<k} f^i{}_{jk}\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^r\wedge\omega^j\wedge\omega^k=0$$

を得る．従って，$r<j<k$ に対して，$f^i{}_{jk}=0$ となるから，

$$d\omega^i=\sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{k=j+1}^{n}-f^i{}_{jk}\omega^k\right)\wedge\omega^j.$$

**Frobenius の積分定理**　$\omega^1,\cdots,\omega^r$ は $\mathsf{E}^n$ $(n=r+s)$ 中の 1-形式で，原点 $O$ で 1 次独立とする．1-形式 $\theta^i{}_j$ $(i,j=1,\cdots,r)$ が存在して

$$d\omega^i=\sum_{j=1}^{r}\theta^i{}_j\wedge\omega^j\qquad(i=1,\cdots,r)$$

を満足すると仮定する．すると，函数 $f^i{}_j, g^j$ $(i,j=1,\cdots,r)$ が存在して

$$\omega^i=\sum_{j=1}^{r}f^i{}_j dg^j\qquad(i=1,\cdots,r)$$

を満足する．

**討議**　仮定は確かに必要である．何故なら，

$$\omega=(\omega^1,\cdots,\omega^r),\qquad F=\|f^i{}_j\|,\qquad \mathrm{g}=(g^1,\cdots,g^r)$$

と書けば，結論は，$\omega=d\mathrm{g}F$ である．行列 $F$ は，原点 $O$ のある近傍で 0 でない行列式をもたねばならないから，

$$d\omega=-d\mathrm{g}\wedge dF=-\omega\wedge F^{-1}dF=\omega\wedge\Theta$$

となる．ただし

$$\Theta=-F^{-1}dF$$

とおいた．

次に，仮定は，$\omega^i$ 達に 1 次変換を施しても変らないことに注意する．実際，$\eta=\omega A$ で，$A$ が $r$ 行 $r$ 列の函数行列で，原点の近くで 0 でない行列式をもつとすれば，

$$\begin{aligned}d\eta&=d\omega A+\omega\wedge dA=\omega\wedge\Theta A+\omega\wedge dA\\&=\eta\wedge(A^{-1}\Theta A+A^{-1}dA)\end{aligned}$$

となるからである．

定理の証明を二つ与えよう．それぞれ，少し異った見地に立っているのである．出発点はつねに同じである．

$$\omega^i = \sum_{j=1}^{n} h^i{}_j dx^j \qquad (i=1, \cdots, r)$$

と書く．$\omega^i$ 達が原点で1次独立だから，$\|h^i{}_j\|$ のある $r$ 次小行列は，原点の近くで0でない行列式をもつ．$(\omega^1, \cdots, \omega^r)$ にこの小行列の逆行列を掛けてやれば，記号を少し変えることにより，次式を得る．

$$\omega^i = dz^i - \sum_{j=1}^{s} A^i{}_j(x^1, \cdots, x^s; z^1, \cdots, z^r)dx^j \qquad (i=1, \cdots, r).$$

**第一の証明**　x-空間の各点 $\mathsf{a}=(a^1, \cdots, a^s)$ に対して，線型空間 $\mathsf{x}=t\mathsf{a}$ に沿っての連立方程式 $\omega^i=0$，すなわち

$$\frac{dz^i}{dt} = \sum A^i{}_j(t\mathsf{a}, \mathsf{z})a^j$$

なる連立常微分方程式を，初期条件 $z^i(0)=c^i$ の下で考える．常微分方程式論により，原点 $O$ の十分小さい近傍において，解が一意的に存在する．すなわち

$$\frac{\partial F^i}{\partial t}(t, \mathsf{a}, \mathsf{c}) = \sum_{j=1}^{s} A^i{}_j[t\mathsf{a}, \mathsf{F}(t, \mathsf{a}, \mathsf{c})]a^j,$$

$$F^i(0, \mathsf{a}, \mathsf{c}) = c^i \qquad (i=1, \cdots, r)$$

を満たす函数の系 $F^i(t, \mathsf{a}, \mathsf{c})$ が(一意的に)存在する．これを $\mathsf{F}=(F^1, \cdots, F^r)$ と書く．

次に $k$ を固定して，$\mathsf{G}(t, \mathsf{a}, \mathsf{c})=\mathsf{F}(kt, \mathsf{a}, \mathsf{c})$ とおけば，$\mathsf{G}(0, \mathsf{a}, \mathsf{c})=\mathsf{c}$ および

$$\frac{\partial G^i}{\partial t}(t, \mathsf{a}, \mathsf{c}) = k\frac{\partial F^i}{\partial t}(kt, \mathsf{a}, \mathsf{c}) = \sum A^i{}_j(tk\mathsf{a}, \mathsf{G})ka^j$$

が成り立つ．従って解の一意性により，$\mathsf{G}(t, \mathsf{a}, \mathsf{c})=\mathsf{F}(t, k\mathsf{a}, \mathsf{c})$ となる．すなわち

$$\mathsf{F}(kt, \mathsf{a}, \mathsf{c}) = \mathsf{F}(t, k\mathsf{a}, \mathsf{c})$$

が成り立つ．特に $t=1$ とおき，次に $k$ を $t$ と書き直せば，

$$\mathsf{F}(t, \mathsf{a}, \mathsf{c}) = \mathsf{F}(1, t\mathsf{a}, \mathsf{c})$$

を得る．さて変換

$$\begin{cases} \mathsf{x} = \mathsf{u}, \\ \mathsf{z} = \mathsf{F}(1, \mathsf{u}, \mathsf{v}) \end{cases}$$

によって，新しい変数 u, v に移る．この座標変換の函数行列式は原点 $O$ のある近傍で0でない：

$$\left.\frac{\partial(\mathrm{x},\mathrm{z})}{\partial(\mathrm{u},\mathrm{v})}\right|_0=\left|\begin{matrix} I & 0 \\ * & \left.\dfrac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{v}}\right|_0 \end{matrix}\right|=\left|\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{v}}\right|_0=1.$$

実際,

$$\left.\frac{\partial z^i}{\partial v^j}\right|_0=\left.\frac{\partial}{\partial v^j}F^i(1,0,\mathrm{v})\right|_0=\left.\frac{\partial}{\partial v^j}F^i(0,\mathrm{a},\mathrm{v})\right|_0=\left.\frac{\partial v^i}{\partial v^j}\right|_0=\delta^i{}_j.$$

この新変数で書けば

$$\omega^i=\sum_{k=1}^{r}B^i{}_k(\mathrm{u},\mathrm{v})\,dv^k+\sum_{j=1}^{s}P^i{}_j(\mathrm{u},\mathrm{v})\,du^j$$

の形となる．各 $\omega^i$ が曲線 $\mathrm{u}=t\mathrm{a}$, $\mathrm{v}=$定数，に沿って恒等的に0になるという事実から，次式が導かれる：

$$\sum_{j=1}^{s}P^i{}_j(t\mathrm{a},\mathrm{v})\,a^j=0 \qquad (i=1,\cdots,r).$$

実は函数 $P^i{}_j(\mathrm{u},\mathrm{v})$ 達が恒等的に0になることを次に示そう．そのために $(t,\mathrm{a},\mathrm{v})$-空間から $(\mathrm{u},\mathrm{v})$-空間への錐写像 $\phi$ なるものを考える．それは次のように定義する．

$$\phi(t,\mathrm{a},\mathrm{v})=(t\mathrm{a},\mathrm{v})=(\mathrm{u},\mathrm{v}).$$

すると

$$\begin{aligned}\phi^*\omega^i&=\sum P^i{}_j(t\mathrm{a},\mathrm{v})\,t\,da^j+(dv^k\text{ 達の1次結合})\\&=\sum \bar{P}^i{}_j(t,\mathrm{a},\mathrm{v})\,da^j+(dv^k\text{ 達の1次結合})\end{aligned}$$

となる．ここで $\bar{P}^i{}_j(t,\mathrm{a},\mathrm{v})=P^i{}_j(t\mathrm{a},\mathrm{v})t$ である．従って $\bar{P}^i{}_j(0,\mathrm{a},\mathrm{v})=0$ である．上式より

$$d\phi^*\omega^i=\sum\frac{\partial\bar{P}^i{}_j}{\partial t}dt\,da^j+(\text{他の項})$$

が出る．最後に仮定 $d\omega^i=\sum\theta^i{}_k\wedge\omega^k$ を使う．

$$\phi^*\theta^i{}_k=H^i{}_k(t,\mathrm{a},\mathrm{v})\,dt+(\text{他の項})$$

とおき，次の関係式において $dt\,da^j$ の係数を比較しよう．

$$d\phi^*\omega^i=\sum(\phi^*\theta^i{}_k)\wedge(\phi^*\omega^k).$$

すると次の等式が得られる．

$$\frac{\partial \bar{P}^i{}_j}{\partial t}(t, \mathrm{a}, \mathrm{v}) = \sum H^i{}_k(t, \mathrm{a}, \mathrm{v})\bar{P}^k{}_j(t, \mathrm{a}, \mathrm{v}).$$

ここで，初期条件 $\bar{P}^i{}_j(0, \mathrm{a}, \mathrm{v})=0$ の下で連立常微分方程式の解の一意性から，$\bar{P}^i{}_j=0$ 従って $P^i{}_j=0$ が出るから，

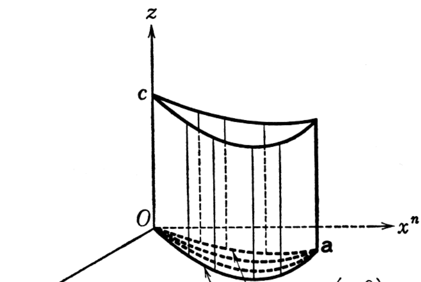
$$\omega^i = \sum_{k=1}^{r} B^i{}_k(\mathrm{u}, \mathrm{v})dv^k$$

となり，求むる結果が得られた．

**第二の証明**は，É. Cartan [10], 188 頁および 193 頁に略述されていることに基づく．前のように

$$\omega^i = dz^i - \sum_{j=1}^{s} A^i{}_j dx^j \qquad (i=1, \cdots, r)$$

から出発する．ただし条件 $d\omega^i = \sum \theta^i{}_j \wedge \omega^j$ が満たされているものとする．原点から点 $\mathrm{a}$ に達する任意の滑らかな曲線をとる．この曲線が $(\mathrm{x}, \mathrm{z})$-空間で張る柱面上で連立方程式 $\omega^i=0$ を，$z$ 軸上の或る一定の初期点 $\mathrm{c}$ の下で解く．点 $\mathrm{x}=\mathrm{a}$ の上にのっている解曲線上の点は，**実は初めにとった x-空間上の特定の曲線には依存しない**ことを示そう．




要点は，x-空間の原点 $O$ の十分小さい近傍では，同一の端点 0, a をもつような任意の二つの滑らかな曲線は，一方から他方へ滑らかに変形可能であるということである．かくして，$\mathrm{x}=\mathrm{x}(t, \alpha)$ を 0 から a へ至る 1 パラメーターの曲線群とする．時刻を表わす変数 $t$ は各曲線上で 0 から 1 まで動き，パラメーター $\alpha$ はあらゆる実数値をとるとする．曲線 $\mathrm{x}(t, 0)$ と $\mathrm{x}(t, 1)$ とに注目しよう．

$$\mathsf{x}(0, \alpha) = 0, \qquad \mathsf{x}(1, \alpha) = \mathsf{a}$$

と仮定しているわけである．$\alpha$ を固定して，対応する柱面上で，初期値 $\mathsf{c}$ の下での $\omega^i=0$ の解を $F^i(t, \alpha)$ とすれば

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F^i}{\partial t} = \displaystyle\sum_{j=1}^{s} A^i{}_j(\mathsf{x}(t, \alpha), \mathsf{F}(t, \alpha))\dfrac{\partial x^j}{\partial t}, \\ F^i(0, \alpha) = c^i \qquad (i=1, \cdots, r) \end{cases}$$

である．さて問題を 2 次元の問題に帰着させる．それには $(t, \alpha)$-空間から $(\mathsf{x}, \mathsf{z})$-空間への写像

$$\phi(t, \alpha) = (\mathsf{x}(t, \alpha), \mathsf{F}(t, \alpha)) = (\mathsf{x}, \mathsf{z})$$

を考えるのである．すると

$$\begin{aligned} \phi^*\omega^i &= \frac{\partial F^i}{\partial t}dt + \frac{\partial F^i}{\partial \alpha}d\alpha - \sum A^i{}_j\frac{\partial x^j}{\partial t}dt - \sum A^i{}_j\frac{\partial x^j}{\partial \alpha}d\alpha \\ &= H^i d\alpha \end{aligned}$$

となる．ただしここで

$$H^i = H^i(t, \alpha) = \frac{\partial F^i}{\partial \alpha} - \sum A^i{}_j\frac{\partial x^j}{\partial \alpha}$$

である．いま

$$\phi^*\theta^i{}_j = P^i{}_j dt + Q^i{}_j d\alpha$$

とおいて，次の等式において $dtd\alpha$ の係数を比較する：

$$d\phi^*\omega^i = \sum (\phi^*\theta^i{}_j) \wedge (\phi^*\omega^j).$$

すると，

$$\frac{\partial H^i}{\partial t} = \sum P^i{}_j H^j$$

が得られる．一方

$$\begin{aligned} H^i(0, \alpha) &= \left.\frac{\partial F^i}{\partial \alpha}\right|_{t=0} - \sum A^i{}_j(0, \alpha)\left.\frac{\partial x^j}{\partial \alpha}\right|_{t=0} \\ &= \frac{d}{d\alpha}F^i(0, \alpha) - \sum A^i{}_j(0, \alpha)\frac{dx^j(0, \alpha)}{d\alpha} \\ &= \frac{d}{d\alpha}c^i - \sum A^i{}_j(0, \alpha)\frac{d0}{d\alpha} = 0. \end{aligned}$$

従って，$H^i=0$ となる(常微分方程式の解の一意性)．よって，

$$\frac{\partial F^i}{\partial \alpha}(t,\alpha) = \sum A^i{}_j \frac{\partial x^j}{\partial \alpha}$$

を得る．ここで特に $t=1$ としてみる．するとそのとき

$$\left.\frac{\partial x^j}{\partial \alpha}(t,\alpha)\right|_{t=1} = \frac{d}{d\alpha}x^j(1,\alpha) = \frac{d}{d\alpha}a^j = 0$$

であるから，

$$\frac{\partial F^i}{\partial \alpha}(1,\alpha) = 0, \qquad F^i(1,\alpha) = \text{定数}$$

となる．これで先程の主張が証明された．

次に，記号をもっと詳しく定めることにする．$F^i(t,\alpha)$ の代りに，この函数が初期条件に依存する状態を指定して，$F^i(t,\alpha;\ \mathsf{a},\mathsf{c})$ と書くことにする．$F^i(1,\alpha)$ が $\alpha$ に無関係だから，

$$G^i(\mathsf{a},\mathsf{c}) = F^i(1,\alpha;\ \mathsf{a},\mathsf{c})$$

とおいてよい．また

$$\mathsf{F} = (F^1,\cdots,F^r), \qquad \mathsf{G} = (G^1,\cdots,G^r)$$

とおく．すると次の諸事実が成立している．

(i) $\mathsf{G}(0,\mathsf{c})=\mathsf{c}$.

(ii) $\mathsf{c}$ を固定すれば，対応 $\mathsf{a}\leftrightarrow(\mathsf{a},\mathsf{G}(\mathsf{a},\mathsf{c}))$ は $\mathsf{a}$-空間の原点 $O$ の近傍から $(\mathsf{a},\mathsf{c})$-空間の中の一つの多様体 $\mathsf{V_c}$ の上への 1 対 1 の対応である．(何故なら，0 から $\mathsf{a}$ へ至る任意の曲線をとって $\mathsf{F}$ を定義し，次に $\mathsf{G}$ を定義すればよいから.)

(iii) 各 $\omega^i$ は $\mathsf{V_c}$ 上で恒等的に 0 である．(何故なら，$\omega^i$ は $\mathsf{V_c}$ 上の各曲線上で 0 になる．しかも $\omega^i$ は 1-形式だから，$\omega^i$ は $\mathsf{V_c}$ 上で恒等的に 0 になる.)

さて $(\mathsf{a},\mathsf{c})$-空間から $(\mathsf{x},\mathsf{z})$-空間への写像

$$(\mathsf{a},\mathsf{c}) \to (\mathsf{a},\mathsf{G}(\mathsf{a},\mathsf{c})) = (\mathsf{x},\mathsf{z})$$

を考える．(ii)により

$$\left.\frac{\partial(\mathsf{x},\mathsf{z})}{\partial(\mathsf{a},\mathsf{c})}\right|_0 = 1$$

である．従って，$(\mathsf{a},\mathsf{c})$ を 0 の或る近傍での座標系として新しく用いてよい．

$\omega^i$ 達をこの新座標で書いて，(iii)を用いれば，$\omega^i$ は微分 $dc^1, \cdots, dc^r$ だけしか含まないことがわかり，証明が完了する．

これらの証明の著しい特色は，初めの連立偏微分方程式(積分可能条件をもった)を，連立常微分方程式に帰着させる点である．

## 7.4 Frobenius の定理の応用

**例 1**　まず微分幾何学において，**無限小変換**(infinitesimal transformation)に関する考察からモティーフを得た問題を，行列の形で述べよう．

$\Omega=\|\omega_i{}^j\|$ を 1-形式を成分とする $r$ 行 $r$ 列の行列とする．定義域は，例えば $\mathrm{E}^n$ の 0 の一つの近傍とする．そのとき，行列式が 0 でない $r$ 行 $r$ 列の函数行列 $A$ を見出して

$$\Omega = (dA)A^{-1}$$

ならしめ得るための条件を問題としよう．きまりをつけるために，初期条件 $A_0=I$ をおく．また後の便宜のために

$$\Theta = d\Omega-\Omega^2$$

とおく．すると基本的な結果は次のように述べられる．

**0 の近傍で定義された函数行列 $A$ が存在して，$A_0=I$ かつ**

$$\Omega = (dA)A^{-1}$$

**となるためには，**

$$\Theta = 0$$

**が必要かつ十分である．このとき，かかる行列 $A$ はただ一つに限る．**

まず第一に，かかる解 $A$ があったとしよう．すると $(dA)A^{-1}=\Omega$, $dA=\Omega A$ から次式を得る．

$$0 = d(dA) = d\Omega A-\Omega\, dA = (\Theta+\Omega^2)A-\Omega(\Omega A) = \Theta A,$$

よって，$\Theta A=0$ であるが，$A$ の行列式が 0 でないから $\Theta=0$ を得る．次に $B$ を他の解とすると，$dA=\Omega A$, $dB=\Omega B$, $A_0=B_0=I$ であるから

$$\begin{aligned} d(B^{-1}A) &= -B^{-1}dBB^{-1}A+B^{-1}dA \\ &= -B^{-1}(\Omega B)B^{-1}A+B^{-1}(\Omega A) = 0, \end{aligned}$$

よって $B^{-1}A$ は定数行列になるが，$B^{-1}A=(B^{-1}A)_0=I$ だから，$B=A$ を得る．

さて次に存在証明に移ろう．座標 $x^1, \cdots, x^n, z_i{}^j$ $(1\leqq i,\ j\leqq r)$ をもった $(n+r^2)$ 次元空間に移って，次の行列 $\Lambda$ の成分として現われる $r^2$ 個の 1-形式を導入する．

$$\Lambda = dZ-\Omega Z, \qquad Z = \|z_i{}^j\|.$$

$\Theta=0$ と仮定しているから

$$d\Lambda = -d\Omega Z+\Omega\, dZ = -\Omega^2 Z+\Omega(\Lambda+\Omega Z).$$

すなわち

$$d\Lambda = \Omega\Lambda$$

となる．従って系 $\Lambda$ は(既に標準形になっているが)，完全積分可能である．従って，$\mathsf{x}=0$ での与えられた初期値に対して $\mathsf{x}$ の函数を成分とする行列 $A$ が存在して，$Z=A$ が $\Lambda=0$ の積分多様体となる．すなわち，

$$dA = \Omega A$$

を満足する．

$\Omega$ が歪対称ならば，$A$ は(初期条件 $A_0=I$ の下で)直交行列となることに注意する．何故ならば，$B={}^tA^{-1}$ ($A$ の転置行列の逆行列)とおけば，

$$B_0 = I, \qquad dB = -B(d\,{}^tA)B = -B\,{}^tA\,{}^t\Omega B = +\Omega B$$

となる．従って一意性により，$B=A$ となる．

**例 2** 次にもう一つの方程式を考える：

$$dA = \Omega A-A\Omega.$$

ここで $\Omega$ は前と同様に，$\mathsf{E}^n$ 中の原点の近傍で定義された 1-形式達を成分とする $r$ 行 $r$ 列の行列であり，$A$ は函数を成分とする未知行列である．再び $\Theta=d\Omega-\Omega^2$ とおく．次のように問題を設定しよう．任意の初期値 $A_0$ をとって，上の方程式の解を見出すことができるか？　微分することにより必要条件を探そう：

$$\begin{aligned} 0 = d(dA) &= d\Omega A-\Omega\, dA-dA\Omega-A\, d\Omega \\ &= (\Theta+\Omega^2)A-\Omega(\Omega A-A\Omega)-(\Omega A-A\Omega)\Omega-A(\Theta+\Omega^2), \end{aligned}$$

これを簡単化すれば，

$$\Theta A = A\Theta$$

となる．初期値 $A_0$ は任意に与えてよいと仮定しているから，0 の十分小さい近傍の各点における $A$ の値は $n$ 次元の領域を埋めつくすことになる．すると，そのような点において $\Theta$ が，多数の(上記の程度に)種々の行列 $A$ と可換であることから，明らかに 2-形式を成分とする行列 $\Theta$ の形は

$$\Theta = \alpha I$$

($\alpha$ は或る 2-形式)となることが導かれる．すると

$$d\Omega - \Omega^2 = \alpha I$$

から，微分して

$$\begin{aligned} d\alpha I &= -d\Omega\Omega + \Omega\, d\Omega \\ &= -(\alpha I + \Omega^2)\Omega + \Omega(\alpha I + \Omega^2) = 0 \end{aligned}$$

が得られる．かくして，局所的には，$\alpha = d\sigma$ なる 1-形式 $\sigma$ がある．これで次の必要条件に達した：1-形式 $\sigma$ が存在して

$$d\Omega - \Omega^2 = (d\sigma) I$$

を満たす．

この条件は別の仕方で表わすこともできる：

$$H = \Omega - \sigma I$$

とおくと，

$$dH - H^2 = 0.$$

この条件の下で，十分性は容易に証明される．前のように，(x, z)-空間で

$$\Gamma = dZ - \Omega Z + Z\Omega$$

を考える．

$$\begin{aligned} d\Gamma &= -d\Omega Z + \Omega\, dZ + dZ\Omega + Z\, d\Omega \\ &= -(\Omega^2 + \Theta) Z + \Omega(\Gamma + \Omega Z - Z\Omega) + (\Gamma + \Omega Z - Z\Omega)\Omega + Z(\Omega^2 + \Theta) \\ &= Z\Theta - \Theta Z + \Omega\Gamma + \Gamma\Omega \end{aligned}$$

に注意すれば，

$$d\Gamma = \Omega\Gamma + \Gamma\Omega$$

を得る．従って系 $\Gamma$ は完全積分可能であることがわかる．さて存在証明は上述

の例1と同様にやればよい．一意性の扱いは次のようにすればよい．系 $\Gamma=0$ は標準形になっていてしかも完全積分可能だから，与えられた初期点 $Z|_0=A_0$ を通って積分曲面が一意的に存在することは既知である．これを使えばよい．

**例3 A. Mayer の連立微分方程式**(C. Carathéodory, [6], 26-31 頁参照)として知られているあるタイプの連立偏微分方程式を考えよう．

前のように座標 $x^1, \cdots, x^s$, $z^1, \cdots, z^r$ をそなえた $\mathsf{E}^{r+s}$ 中の0の近傍で考える．函数系 $B^i{}_j(\mathsf{x}, \mathsf{z})$ $(i=1, \cdots, r,\ j=1, \cdots, s)$ が与えられているとする．Mayer の連立微分方程式とは次の形のものである．

$$\frac{\partial z^i}{\partial x^j} = B^i{}_j(\mathsf{x}, \mathsf{z}).$$

いま

$$A^i{}_{jk} = \frac{\partial B^i{}_j}{\partial x^k} - \frac{\partial B^i{}_k}{\partial x^j} + \sum \frac{\partial B^i{}_j}{\partial z^\alpha} B^\alpha{}_k - \sum \frac{\partial B^i{}_k}{\partial z^\beta} B^\beta{}_j$$

とおけば，明らかに $A^i{}_{jk}+A^i{}_{kj}=0$ が成り立つ．もし各初期条件 $\mathsf{c}$ に対して，解 $\mathsf{z}=\mathsf{F}(\mathsf{x}, \mathsf{c})$ が存在して $\mathsf{c}=\mathsf{F}(0, \mathsf{c})$ を満たすならば，この Mayer の連立微分方程式は原点 $O$ の近傍で**完全積分可能**であるという．完全積分可能であるための必要十分条件は $A^i{}_{jk}=0$ に他ならないのである．その理由は次の通り．

$$\omega^i = dz^i - \sum_{j=1}^{s} B^i{}_j(\mathsf{x}, \mathsf{z})\, dx^j \qquad (i=1, \cdots, r)$$

とおくと，$\omega^i$ 達は $(\mathsf{x}, \mathsf{z})$-空間の1-形式の系で，しかも標準形にある．$A^i{}_{jk}$ が消失条件 $A^i{}_{jk}=0$ を満たせば，ちょっと計算することによって

$$d\omega^i = \sum \left( \sum \frac{\partial B^i{}_j}{\partial z^\alpha} dx^j \right) \wedge \omega^\alpha$$

が得られる．従って系 $\omega^1, \cdots, \omega^r$ は完全積分可能である．その積分曲面 $\mathsf{z}=\mathsf{F}(\mathsf{x}, \mathsf{c})$ は Mayer の連立方程式の解になっている．

逆に，Mayer の連立方程式が完全積分可能とする．すると明らかに系 $\omega^1= \cdots =\omega^r=0$ は，各初期条件 $\mathsf{c}$ に対して積分曲面をもつ．従って，必要条件

$$d\omega^i = \sum \theta^i{}_j \wedge \omega^j$$

が満たされていなければならない．一方直接計算により

$$d\omega^i = \frac{1}{2}\sum A^i{}_{jk}dx^j dx^k + \sum \eta^i{}_\alpha \wedge \omega^\alpha$$

が確かめられる．ただしここで

$$\eta^i{}_\alpha = \sum \frac{\partial B^i{}_j}{\partial z^\alpha}dx^j$$

とおいた．さて $dx^1, \cdots, dx^s, \omega^1, \cdots, \omega^r$ は 1 次独立だから，上式から

$$\theta^i{}_j \wedge \omega^j = \sum \eta^i{}_\alpha \wedge \omega^\alpha, \qquad \sum_{j<k} A^i{}_{jk}dx^j dx^k = 0$$

が出る．従って $A^i{}_{jk}=0$ を得る．

**註**　系 $\omega^1, \cdots, \omega^r$ が完全積分可能ならば，1-形式を成分とする $r$ 行 $r$ 列の行列 $\Theta=\|\theta^i{}_j\|$ が存在して

$$d\omega^i = \sum \theta^i{}_j \wedge \omega^j,$$

すなわち，行列記法で

$$d\omega = -\omega \wedge \Theta$$

を満足する．しかしながらこのとき

$$\omega = d\mathrm{g}F, \qquad \mathrm{g} = (g^1, \cdots, g^r), \qquad F = \|f^i{}_j\|$$

の解 g, $F$ が存在するから，$d\omega = -\omega \wedge F^{-1}dF$ となる．従って，つねに $\Theta$ を極めて特殊な形 $\Theta = F^{-1}dF$ に選ぶことが出来るのである．(このことが例 1 の問題に対して或る動機になっている.)

更に Frobenius の定理を応用することについては，後述の局所的 Riemann 幾何学の所で見られるであろう．また第X章の問題 4〜7 をも参照.

## 7.5　連立常微分方程式

次の連立常微分方程式を考える，

$$\frac{dx^1}{dt} = X^1(t, x^1, \cdots, x^n),$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{dx^n}{dt} = X^n(t, x^1, \cdots, x^n).$$

この連立微分方程式と密接な同伴関係にあるのが次の $(t, \mathrm{x})$-空間中の $n$-形式

である.

$$\Omega = (dx^1 - X^1 dt)\cdots(dx^n - X^n dt).$$

ちょっと計算すれば次式が得られる.

$$d\Omega = \left(\sum \frac{\partial X^i}{\partial x^i}\right) dt dx^1 \cdots dx^n.$$

いま変数変換

$$y^i = y^i(t, x^1, \cdots, x^n) \qquad (i=1, \cdots, n)$$

を行ない，そして次の二つの連立微分方程式はこの変数変換の下で同値であるとする:

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(t, \mathrm{x})\,; \qquad \frac{dy^i}{dt} = Y^i(t, \mathrm{y}).$$

そして

$$\bar{\Omega} = (dy^1 - Y^1 dt)\cdots(dy^n - Y^n dt)$$

とおく. $d\Omega$ と $d\bar{\Omega}$ の間の関係を求めよう. さて

$$\frac{dy^i}{dt} = \frac{\partial y^i}{\partial t} + \sum \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\frac{dx^j}{dt},$$

$$Y^i = \frac{\partial y^i}{\partial t} + \sum \frac{\partial y^i}{\partial x^j} X^j,$$

および

$$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial t} dt + \sum \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j$$

であるから,

$$dy^i - Y^i dt = \sum \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(dx^j - X^j dt)$$

となる. 従って函数行列式を $J$ とおくと，すなわち

$$J = \frac{\partial(y^1, \cdots, y^n)}{\partial(x^1, \cdots, x^n)} = \left|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|$$

として，外積を実行して，次の等式を得る.

$$\bar{\Omega} = J\Omega.$$

これを微分して

$$d\bar{\Omega} = (dJ)\Omega + J d\Omega$$

となる．さて，

$$d\bar{\Omega} = \left(\sum \frac{\partial Y^i}{\partial y^i}\right) dt dy^1 \cdots dy^n = \left(J \sum \frac{\partial Y^i}{\partial y^i}\right) dt dx^1 \cdots dx^n,$$

および

$$(dJ)\Omega + J\, d\Omega = \left(\frac{\partial J}{\partial t} dt + \sum \frac{\partial J}{\partial x^i} dx^i\right)\Omega + J\left(\sum \frac{\partial X^i}{\partial x^i}\right) dt dx^1 \cdots dx^n$$

$$= \left(\frac{\partial J}{\partial t} + \sum \frac{\partial J}{\partial x^i} X^i + J \sum \frac{\partial X^i}{\partial x^i}\right) dt dx^1 \cdots dx^n$$

とから，次式が得られる．

$$\sum \frac{\partial Y^i}{\partial y^i} = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial J}{\partial t} + \sum \frac{\partial (JX^i)}{\partial x^i}\right).$$

函数 $f = f(t, \mathsf{x})$ が，与えられた連立常微分方程式系の**第 1 積分** (first integral) であるとは，$f$ がこの系の各軌道すなわち各解曲線に沿って定数なることをいう．通例の解の一意存在定理により，系が定義されている空間の各点を通って解があることが保証されるから，$f$ が第 1 積分となるための条件として

$$\frac{df}{dt} = 0$$

すなわち

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum \frac{\partial f}{\partial x^j} X^j = 0$$

が得られる．

上述の変数変換に登場する各函数 $y^1, \cdots, y^n$ が第 1 積分であると仮定しよう．すると

$$Y^i = 0, \qquad \bar{\Omega} = dy^1 \cdots dy^n$$

となる．（このような変数変換は，任意に前以て与えられた初期条件に依存するような一般解の存在により，空間の小領域においてはつねに可能である.）

函数 $M = M(t, x^1, \cdots, x^n)$ が

$$d(M\Omega) = 0$$

すなわち

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\sum\frac{\partial(MX^i)}{\partial x^i}=0$$

を満たすとき，$M$を与えられた連立微分方程式系の**最終乗数**(last multiplier)という．上のように第1積分に基づく変数変換を用いれば

$$M\Omega=\left(\frac{M}{J}\right)\bar{\Omega}=H\bar{\Omega}=H\,dy^1\cdots dy^n$$

となる．よって

$$d(M\Omega)=(dH)\,dy^1\cdots dy^n=\frac{\partial H}{\partial t}dtdy^1\cdots dy^n$$

となる．従って，$M$が最終乗数となるためには，$H$が$t$を含まぬことが必要十分である．すなわち

$$M\Omega=H(\mathsf{y})\,dy^1\cdots dy^n$$

が条件である．$M_1$と$M_2$とが最終乗数ならば

$$M_1\Omega=H_1(\mathsf{y})\,dy^1\cdots dy^n,\qquad M_2\Omega=H_2(\mathsf{y})\,dy^1\cdots dy^n$$

であるから

$$\frac{M_1}{M_2}=\frac{H_1(\mathsf{y})}{H_2(\mathsf{y})}$$

となる．従って，$M_1/M_2$は$y^i$達だけに依存し，従って(各$y^i$がそうだから)各軌道上で定数となる．従って$M_1/M_2$も第1積分である．これで次の重要な結果が証明された：

**二つの最終乗数の商は，一つの第1積分である．**

## 7.6 Lieの第3定理

Sophus Lieの第3基本定理として知られている定理は，連続群をその構造定数だけが与えられているときに再構成するために発明されたものである．これらの諸概念は第IX章で説明しよう．目下の目的のためには，この定理を偏微分方程式論における一つの結果，それもかなり深い結果，とみなすことにする．

$\mathsf{E}^n$において考察する．添数はすべて1から$n$まで動く．まず第一に，次の条件を満たすような$n^3$個の定数$c^i{}_{jk}$達が与えられているとする：

$$c^i{}_{jk}+c^i{}_{kj}=0,$$

$$\sum_j (c^i{}_{jk}c^j{}_{rs}+c^i{}_{jr}c^j{}_{sk}+c^i{}_{js}c^j{}_{kr})=0.$$

問題は，$n$ 個の 1-形式 $\sigma^1, \cdots, \sigma^n$ を見出して，これらが $\mathsf{E}^n$ の原点 $O$ の或る近傍上で 1 次独立で，しかも次の関係式

$$d\sigma^i=\frac{1}{2}\sum c^i{}_{jk}\sigma^j\wedge\sigma^k$$

を満たすようにすることである．Lie の定理はこれができることを主張する．

定数 $c^i{}_{jk}$ 達に対して仮定した 2 次の関係式は，問題が解けると仮定すれば，容易に $d(d\sigma^i)=0$ と同じであることが検証される．よって，それらは必要条件である．以下，それらが十分条件でもあることを見よう．これから与える証明は Cartan [10]，239 頁と [7]，280-283 頁にある証明に基づく．証明が長いので，それをいくつかの段階に分ける．

**第 1 段階** 次の連立常微分方程式

$$\frac{\partial h^i{}_j}{\partial t}=\delta^i{}_j+\sum c^i{}_{kl}x^k h^l{}_j$$

を，未知函数 $h^i{}_j=h^i{}_j(t, \mathsf{x})$ に対して，初期条件

$$h^i{}_j(0, \mathsf{x})=0$$

の下で解く．これは(非同次な)線型方程式であるから，すべての $t$ と $x$ に対して有効な(解析的な)解がある．ここでは変数 $\mathsf{x}$ はパラメーターとして登場していること，そして $n^2$ 個の方程式と $n^2$ 個の未知函数が登場していることに注意しておく．$\mathsf{x}=0$ においては

$$\frac{\partial h^i{}_j(t, 0)}{\partial t}=\delta^i{}_j, \qquad h^i{}_j(0, 0)=0$$

となるから，

$$h^i{}_j(t, 0)=\delta^i{}_j t$$

を得る．従って次式が成り立つ．

$$h^i{}_j(1, 0)=\delta^i{}_j.$$

**第 2 段階**

$$\omega^i = \sum h^i{}_j(t, \mathrm{x})\, dx^j$$

とおく．従ってこれらの $\omega^i$ 達は $(t, \mathrm{x})$-空間における $n$ 個の 1-形式である．また

$$d\omega^i = \lambda^i + dt \wedge \alpha^i$$

とおく．ここで 2-形式 $\lambda^i$ 達も，1-形式 $\alpha^i$ 達も $dt$ も含まないとする．かくして

$$\alpha^i = \sum \frac{\partial h^i{}_j}{\partial t} dx^j = \sum (\delta^i{}_j + \sum c^i{}_{kl} x^k h^l{}_j)\, dx^j$$
$$= dx^i + \sum c^i{}_{kl} x^k (\sum h^l{}_j dx^j),$$

すなわち

$$\alpha^i = dx^i + \sum c^i{}_{kl} x^k \omega^l$$

となる．

**第 3 段階** $d\lambda^i$ に対して一つの公式を確立する．

$$0 = d(d\omega^i) = d\lambda^i - dt \wedge d\alpha^i$$

であるから

$$d\lambda^i = dt \wedge d\alpha^i$$
$$= dt \wedge (\sum c^i{}_{kl} dx^k \wedge \omega^l + \sum c^i{}_{kl} x^k d\omega^l)$$

となる．ところが

$$d\omega^l = \lambda^l + dt \wedge \alpha^l$$

であって，項 $dt \wedge \alpha^l$ は $dt$ を掛けると消え去るから

$$d\lambda^i = dt \wedge (\sum c^i{}_{kl} dx^k \wedge \omega^l + \sum c^i{}_{kl} x^k \lambda^l)$$

を得る．

**第 4 段階**

$$\theta^i = \lambda^i - \frac{1}{2} \sum c^i{}_{jk} \omega^j \wedge \omega^k$$

とおき，次の決定的な公式を証明しよう．

$$d\theta^i = dt \wedge (\sum c^i{}_{jk} x^j \theta^k) + (dt \text{ を含まぬ項}).$$

そのためには，$c^i{}_{jk}$ が下の添数について歪対称であることを数回にわたって，

そして $c^i{}_{jk}$ 達の間の 2 次関係式を 1 回は用いねばならない．

$$\begin{aligned} d\theta^i &= d\lambda^i - \sum c^i{}_{jk} d\omega^j \wedge \omega^k \\ &= dt \wedge (\sum c^i{}_{kl} dx^k \wedge \omega^l + \sum c^i{}_{kl} x^k \lambda^l) - \sum c^i{}_{jk} (\lambda^j + dt \wedge \alpha^j) \wedge \omega^k \end{aligned}$$

となるが，

$$\alpha^j \wedge \omega^k = dx^j \wedge \omega^k + \sum c^j{}_{rs} x^r \omega^s \wedge \omega^k$$

であるから

$$d\theta^i = dt \wedge (\sum c^i{}_{kl} x^k \lambda^l - \sum c^i{}_{jk} c^j{}_{rs} x^r \omega^s \wedge \omega^k) + (\text{その他の項})$$

となる．ところが

$$\begin{aligned} \sum c^i{}_{jk} c^j{}_{rs} \omega^s \wedge \omega^k &= \frac{1}{2} \sum (c^i{}_{jk} c^j{}_{rs} - c^i{}_{js} c^j{}_{rk}) \omega^s \wedge \omega^k \\ &= \frac{1}{2} \sum (c^i{}_{jk} c^j{}_{rs} + c^i{}_{js} c^j{}_{kr}) \omega^s \wedge \omega^k \\ &= -\frac{1}{2} \sum c^i{}_{jr} c^j{}_{sk} \omega^s \wedge \omega^k \end{aligned}$$

であるから，

$$d\theta^i = dt \wedge \left( \sum c^i{}_{kl} x^k \lambda^l + \frac{1}{2} \sum c^i{}_{jr} c^j{}_{sk} x^r \omega^s \wedge \omega^k \right) + (\text{その他の項})$$

となる．添数を少々書き直せば，次式に達する．

$$\begin{aligned} d\theta^i &= dt \wedge \sum c^i{}_{kl} x^k \left( \lambda^l - \frac{1}{2} \sum c^l{}_{sj} \omega^s \wedge \omega^j \right) + (\text{その他の項}) \\ &= dt \wedge \sum c^i{}_{kl} x^k \theta^l + (\text{その他の項}). \end{aligned}$$

**第 5 段階**　さて

$$\theta^i = 0$$

を示そう．$\omega^j$ 達も $\lambda^i$ 達も $dt$ を含まないから，$\theta^i$ も $dt$ を含まない．従って

$$\theta^i = \frac{1}{2} \sum g^i{}_{jk} dx^j dx^k, \qquad g^i{}_{jk} = g^i{}_{jk}(t, \mathrm{x})$$

と書ける．まず

$$g^i{}_{jk}(0, \mathrm{x}) = 0$$

なることを示そう．

実際，$h^i{}_j(0, \mathrm{x})=0$ から，$\omega^i$ 達の係数が $t=0$ で $0$ になることのみならず，

$$\lambda^i = \frac{1}{2}\sum\left(\frac{\partial h^i{}_j}{\partial x^k} - \frac{\partial h^i{}_k}{\partial x^j}\right)dx^k dx^j$$

の係数も $t=0$ で $0$ になることがわかる．それは偏微分係数の定義そのものからわかる：

$$\left.\frac{\partial h^i{}_j}{\partial x^k}\right|_{t=0} = \frac{\partial h^i{}_j(0, \mathrm{x})}{\partial x^k} = 0.$$

これらのことから，$g^i{}_{jk}$ 達の初期値に対する主張 $g^i{}_{jk}(0, \mathrm{x})=0$ が示された．

第4段階の結果により

$$\frac{\partial g^i{}_{jk}}{\partial t} = \sum c^i{}_{rs} x^r g^s{}_{jk}$$

が出る．この同次の線型方程式と，$g$ 達は $t=0$ で $0$ という初期条件とを一緒にすれば，解の一意性から

$$g^i{}_{jk}(t, \mathrm{x}) = 0$$

が出る．従って，$\theta^i=0$ が示された．

**第6段階**　さてこの話に結末をつけよう．$\theta^i=0$ であるから，

$$\lambda^i = \frac{1}{2}\sum c^i{}_{jk}\omega^j \wedge \omega^k$$

となる．従って

$$d\omega^i = \frac{1}{2}\sum c^i{}_{jk}\omega^j \wedge \omega^k + dt \wedge \alpha^i$$

となる．この関係式を部分空間 $t=1$ 上で考えよう．

$$\sigma^i = \omega^i|_{t=1} = \sum h^i{}_j(1, \mathrm{x})\,dx^j$$

とおけば

$$d\sigma^i = \frac{1}{2}\sum c^i{}_{jk}\sigma^j \wedge \sigma^k$$

となる．さて $h^i{}_j(1, 0)=\delta^i{}_j$（第1段階）であるから，1-形式 $\sigma^1, \cdots, \sigma^n$ 達は原点 $O$ において1次独立である．これからもちろん原点の或る近傍における1次独立性が出るから，証明は完成した．

# 第 VIII 章　微分幾何学への応用

## 8.1　曲面論(つづき)

本節にあることはみな4.5節の局所理論に基づくのである．いまは積分を意のままに利用できるので，大局的な結果も少々論じよう．$\Sigma$ を $E^3$ 中の閉曲面とする．$e_3$ として $\Sigma$ の外向きの法線をとる．写像

$$x \to e_3$$

は $\Sigma$ から単位球面 $S^2$ への写像である．$x$ が $\Sigma$ 上を動くにつれて，$e_3$ も $S^2$ を整数回動く．この整数を上の法線写像の**次数**(degree)という(6.2節参照)．法線写像の面積要素は

$$de_3 = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2$$

であるから

$$\omega_1 \omega_2 = K\sigma_1\sigma_2$$

となる．ここで $K$ は Gauss 曲率である．従って，次数を $n$ とすると

$$\int_\Sigma K\sigma_1\sigma_2 = 4\pi n$$

となる．因子 $4\pi$ は単位球面の面積に過ぎない．

特に，もし $\Sigma$ が**凸な**(convex)閉曲面ならば，$x$ が $\Sigma$ 上を動くとき $e_3$ は $S^2$ をちょうど1回被覆する．従ってこの場合には

$$\int_\Sigma K\sigma_1\sigma_2 = 4\pi$$

となる．

これ以後，凸な閉曲面のみを論ずることにする．二つの重要な不変量がある．すなわち総面積

$$A = \int_\Sigma \sigma_1\sigma_2$$

と，平均曲率の積分

$$M = \int_{\Sigma} H\sigma_1\sigma_2$$

である.

凸閉曲面 $\Sigma$ と一定の正数 $a$ とが与えられたとき，$\Sigma$ に距離 $a$ で**平行な**(parallel)曲面 $\Sigma'$ を次のようにして作る：$\Sigma$ の各点 $\mathbf{x}$ で外向きに引いた法線上で，距離 $a$ の所に目印をつけ，このようにして得られるすべての点の軌跡をとるのである．かくして平行曲面上の典型的な点は

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + a\mathbf{e}_3$$

である．ここで $\mathbf{e}_3$ はつねに $\mathbf{x}$ における法線を示す．すると

$$\begin{aligned} d\mathbf{y} &= d\mathbf{x} + a\,d\mathbf{e}_3 \\ &= (\sigma_1\mathbf{e}_1 + \sigma_2\mathbf{e}_2) + a(\omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2) \\ &= (\sigma_1 + a\omega_1)\mathbf{e}_1 + (\sigma_2 + a\omega_2)\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

となるから，平行曲面 $\Sigma'$ の $\mathbf{y}$ での法線は再び $\mathbf{e}_3$ になり，$\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{e}_2$ とが $\mathbf{y}$ での接空間の基底にとれることがわかる．かくして

$$d\mathbf{y} = \tau_1\mathbf{e}_1 + \tau_2\mathbf{e}_2,$$

ただし

$$\tau_1 = \sigma_1 + a\omega_1, \qquad \tau_2 = \sigma_2 + a\omega_2$$

が得られる.

従って，$\Sigma'$ の面積要素は

$$\begin{aligned} \tau_1\tau_2 &= (\sigma_1 + a\omega_1)(\sigma_2 + a\omega_2) \\ &= \sigma_1\sigma_2 + a(\sigma_1\omega_2 - \sigma_2\omega_1) + a^2\omega_1\omega_2 \\ &= (1 + 2aH + a^2K)\sigma_1\sigma_2 \end{aligned}$$

となるから，$\Sigma'$ の総面積は

$$A' = \int \tau_1\tau_2 = \int (1 + 2aH + a^2K)\sigma_1\sigma_2,$$

$$A' = A + 2aM + 4\pi a^2$$

となる.

(この公式はまた次のようにしても証明される．まず多面体のとき証明し，

次に $\Sigma$ を多面体の列で近似して極限をとるのである．$\Sigma$ が凸多面体のときにこの公式の意味する所を調べれば，$H$ が**2面角** (dihedral angle) の測度を与え，$K$ が**頂点角** (vertex angle) の測度を与えることがわかるであろう.)

$a$ について積分して，容易にそれぞれ $\Sigma'$ と $\Sigma$ とで囲まれた3次元体積 $V'$, $V$ の間の関係を得る：

$$V' = V + aA + a^2M + \frac{4}{3}\pi a^3.$$

また次の諸関係も確かめられる．

$$M' = M + 4\pi a,$$

$$H' = \frac{H + aK}{1 + 2aH + a^2K},$$

$$K' = \frac{K}{1 + 2aH + a^2K}.$$

次に，われわれの凸閉曲面 $\Sigma$ の**支持函数** (support function) なるものを導入しよう．その定義は

$$p = \mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_3$$

である．$\Sigma$ を原点 $O$ が $\Sigma$ の内側にあるように固定すると便利である．そのとき $\Sigma$ の各点において $p>0$ となる．

次の方法は種々の恒等式を得るのに用いられる．$\lambda$ を $\Sigma$ 上の任意の1-形式とすれば

$$\int_\Sigma d\lambda = 0$$

となる．何故なら $\partial\Sigma=0$ だから Stokes の定理により

$$\int_\Sigma d\lambda = \int_{\partial\Sigma}\lambda = 0.$$

まず次の微分形式 $\alpha$ を考える：

$$\alpha = \mathbf{e}_3\cdot(\mathbf{x}\times d\mathbf{x}).$$

すると

$$d\alpha = d\mathbf{e}_3\cdot(\mathbf{x}\times d\mathbf{x}) + \mathbf{e}_3\cdot(d\mathbf{x}\times d\mathbf{x})$$

であるが，一方

$$d\mathrm{e}_3\cdot(\mathrm{x}\times d\mathrm{x}) = -\mathrm{x}\cdot(d\mathrm{e}_3\times d\mathrm{x})$$
$$= -\mathrm{x}\cdot(d\mathrm{x}\times d\mathrm{e}_3) = -\mathrm{x}\cdot(2H\sigma_1\sigma_2\mathrm{e}_3)$$
$$= -2H\sigma_1\sigma_2(\mathrm{x}\cdot\mathrm{e}_3) = -2pH\sigma_1\sigma_2,$$

および

$$\mathrm{e}_3\cdot(d\mathrm{x}\times d\mathrm{x}) = \mathrm{e}_3\cdot(2\sigma_1\sigma_2\mathrm{e}_3)$$
$$= 2\sigma_1\sigma_2$$

であるから

$$d\alpha = 2[\sigma_1\sigma_2 - pH\sigma_1\sigma_2]$$

となる.

$d\alpha$ の積分が 0 であるから

$$A = \int_\Sigma \sigma_1\sigma_2 = \int_\Sigma pH\sigma_1\sigma_2.$$

次に

$$\beta = \mathrm{x}\cdot(\mathrm{e}_3\times d\mathrm{e}_3)$$

とおくと, $\alpha$ に対して行なったのと同様な計算により

$$d\beta = 2[pK\sigma_1\sigma_2 - H\sigma_1\sigma_2]$$

となる. 従って次式を得る.

$$M = \int_\Sigma H\sigma_1\sigma_2 = \int_\Sigma pK\sigma_1\sigma_2.$$

荷重 $p$ のあるときの $H$ と $K$ の積分が分ったから, 微分形式 $p\sigma_1\sigma_2$ の $\Sigma$ 上の積分を求めるのも合理的である. これを得るため次の面積ベクトルから出発する.

$$(\sigma_1\sigma_2)\mathrm{e}_3 = \frac{1}{2}d\mathrm{x}\times d\mathrm{x} = (dydz, dzdx, dxdy).$$

これから次式が得られる.

$$p\sigma_1\sigma_2 = (\mathrm{x}\cdot\mathrm{e}_3)(\sigma_1\sigma_2) = \mathrm{x}\cdot(dydz, dzdx, dxdy)$$
$$= x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy.$$

凸閉曲面で囲まれた $\mathrm{E}^3$ の領域を R とし, その体積を $V$ と書けば,

$$\int_\Sigma p\sigma_1\sigma_2 = \int_{(\Sigma=\partial\mathrm{R})}(x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy)$$

$$= \int_R d(x\,dydz + \cdots) = 3\int_R dxdydz = 3V.$$

よって次の公式が得られた．

$$\frac{1}{3}\int_\Sigma p\sigma_1\sigma_2 = V.$$

本節の終りとして次の興味ある定理を述べよう．

**Σを凸閉曲面で，一定の Gauss 曲率 $K$ をもつとする．するとΣは球面である．**

これを証明するため，任意の運動座標系に対して 4.5 節で展開した次の諸関係式を想起する．

$$\begin{cases} d\mathrm{x} = \sigma_1\mathrm{e}_1 + \sigma_2\mathrm{e}_2, \\ d\mathrm{e}_3 = \omega_1\mathrm{e}_1 + \omega_2\mathrm{e}_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_1 = p\sigma_1 + q\sigma_2, \\ \omega_2 = q\sigma_1 + r\sigma_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} H = \dfrac{1}{2}(p+r), \\ K = pr - q^2. \end{cases}$$

Σが凸だから行列

$$\begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}$$

は正定値である：$p>0$, $r>0$, $K>0$ (詳しくは次節 145-147 頁参照)．算術平均と幾何平均の間の不等式から

$$K = pr - q^2 \leqq pr \leqq \left[\frac{1}{2}(p+r)\right]^2 = H^2$$

を得る．等号 $K=H^2$ が成立するのは，$q=0$, $p=r=H$ のときに限ることも注意しておく．そのとき $\omega_1 = H\sigma_1$, $\omega_2 = H\sigma_2$, $d\mathrm{e}_3 = H\,d\mathrm{x}$ となる．

一方，仮定 $K=$定数，を利用して，Σ上の積分をとれば

$$\iint \sigma_1\sigma_2 = \iint pH\sigma_1\sigma_2 \geqq \iint p\sqrt{K}\,\sigma_1\sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{K}}\iint pK\sigma_1\sigma_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{K}}\iint H\sigma_1\sigma_2 \geqq \frac{1}{\sqrt{K}}\iint \sqrt{K}\,\sigma_1\sigma_2 = \iint \sigma_1\sigma_2$$

となる．この不等式の両端の量が等しいから，積分記号内の函数はすべて等しくならねばならない．よって $H=\sqrt{K}$ となる．従って上述の不等式に関する注意により，$d\mathbf{e}_3=H\,d\mathbf{x}$, $H=$定数，を得る．よって，$H\mathbf{x}=\mathbf{e}_3+H\mathbf{c}$, $\mathbf{c}$ は定数ベクトル，となるから，

$$|\mathbf{x}-\mathbf{c}| = \frac{1}{H}|\mathbf{e}_3| = \frac{1}{H}$$

となり，$\Sigma$ は球面となる．

## 8.2 超曲面論

曲面の研究を高次元に拡張し，同時に次節の Riemann 幾何学に関する事項のあるものの動機づけをする．

**超曲面**(hypersurface)とは $\mathrm{E}^{n+1}$ 中に埋めこまれた $n$ 次元多様体 M をいう．M 上の動点を $\mathbf{x}$ と書く．局所的な事項を考察するから，M の各点 $\mathbf{x}$ で一定の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ がとれるとしてよい．写像 $\mathbf{x}\to\mathbf{n}$ は M から $\mathrm{S}^n$ への滑らかな写像である．(超曲面 M 上で大域的にこの写像が可能なのは，M が向きづけ可能のとき，そしてそのときに限る.) 点 $\mathbf{x}$ における接空間は $n$ 次元 Euclid 空間である．その直交基底 $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ を定める．かくして，$\mathbf{x}$ においてベクトル $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$, $\mathbf{n}$ は $\mathrm{E}^{n+1}$ の正規直交系をなす．$d\mathbf{x}$ は接空間中にあるから

$$d\mathbf{x} = \sigma_1\mathbf{e}_1+\cdots+\sigma_n\mathbf{e}_n$$

と書ける．ここで $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ は M 上の 1-形式である．関係

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_k = \delta_{ik}, \qquad \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{n} = 0, \qquad \mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$$

から次式を得る．

$$d\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_k+\mathbf{e}_i\cdot d\mathbf{e}_k = 0,$$
$$d\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{n}+\mathbf{e}_i\cdot d\mathbf{n} = 0, \qquad \mathbf{n}\cdot d\mathbf{n} = 0.$$

従って

$$\begin{cases} d\mathbf{e}_i = \sum \omega_{ij}\mathbf{e}_j-\omega_i\mathbf{n}, \\ d\mathbf{n} = \sum \omega_i\mathbf{e}_i \end{cases}$$

と書ける．ここで $\omega_{ij}, \omega_i$ は M 上の 1-形式であって

$$\omega_{ij}+\omega_{ji}=0$$

を満たす．これらの構造方程式達をみな行列の形で書くと便利である．

$$\begin{cases} \mathrm{e}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}_1\\ \vdots\\ \mathrm{e}_n\end{pmatrix}, & \sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n),\\ \Omega=\|\omega_{ij}\|, & \omega=(\omega_1,\cdots,\omega_n)\end{cases}$$

とおけば

$$\begin{cases} d\mathrm{x}=\sigma\mathrm{e},\\ d\begin{pmatrix}\mathrm{e}\\ \mathrm{n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Omega & -{}^t\omega\\ \omega & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}\\ \mathrm{n}\end{pmatrix},\\ \Omega+{}^t\Omega=0\end{cases}$$

となる．外微分をとれば積分可能条件が得られる．(以下外積の記号$\wedge$を省略する．微分形式の積は外積である.)

$$\begin{aligned}0=d(d\mathrm{x})&=(d\sigma)\mathrm{e}-\sigma(d\mathrm{e})\\ &=(d\sigma)\mathrm{e}-\sigma(\Omega\mathrm{e}-{}^t\omega\mathrm{n})\\ &=(d\sigma-\sigma\Omega)\mathrm{e}+\sigma\,{}^t\omega\mathrm{n},\end{aligned}$$

$$d\sigma=\sigma\Omega,\qquad \sigma\,{}^t\omega=0;$$

$$\begin{aligned}0&=d\left[d\begin{pmatrix}\mathrm{e}\\ \mathrm{n}\end{pmatrix}\right]\\ &=\begin{pmatrix}d\Omega & -d\,{}^t\omega\\ d\omega & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}\\ \mathrm{n}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\Omega & -{}^t\omega\\ \omega & 0\end{pmatrix}d\begin{pmatrix}\mathrm{e}\\ \mathrm{n}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}d\Omega & -d\,{}^t\omega\\ d\omega & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}\\ \mathrm{n}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\Omega & -{}^t\omega\\ \omega & 0\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}\mathrm{e}\\ \mathrm{n}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}d\Omega-\Omega^2+{}^t\omega\omega & -{}^t(d\omega)+\Omega\,{}^t\omega\\ d\omega-\omega\Omega & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}\\ \mathrm{n}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$d\Omega-\Omega^2+{}^t\omega\omega=0,\qquad d\omega=\omega\Omega.$$

2-形式を成分とする歪対称行列$\Theta$を次式で定義する：

$$\Theta=\|\theta_{ij}\|=d\Omega-\Omega^2.$$

すると以上の結果をまとめて次のようになる．

$$\begin{cases} d\sigma = \sigma\Omega, \\ \Omega + {}^t\Omega = 0, \\ \sigma\,{}^t\omega = 0, \\ d\omega = \omega\Omega, \\ \Theta + {}^t\omega\omega = 0. \end{cases}$$

或いは個々の行列成分で書けば次の通り：

$$\begin{cases} d\sigma_j = \sum \sigma_i\omega_{ij}, \\ \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \\ \sum \sigma_i\omega_i = 0, \\ d\omega_j = \sum \omega_i\omega_{ij}, \\ \theta_{ij} + \omega_i\omega_j = 0. \end{cases}$$

$\sigma_i$ 達は M 上の 1-形式達の基底をなすから

$$\omega_i = \sum b_{ij}\sigma_j$$

と書ける．$\sum \sigma_i\omega_i = 0$ であるから，$b_{ij}$ 達は対称でなければならない：

$$b_{ij} = b_{ji}.$$

**平均曲率** (mean curvature) $H$ と **Gauss 曲率** (Gaussian curvature) $K$ が次式で定義される．

$$H = \frac{1}{n}\sum b_{ii}, \qquad K = |b_{ij}|.$$

$\sigma_1\cdots\sigma_n$ は M 上の $n$ 次元体積要素であり，$\omega_1\cdots\omega_n$ は対応する $S^n$ 上の体積要素であるから，行列式 $K$ は体積の比，すなわち，球面像の体積を M 上の体積で割った比を表わす．その理由は次式の通り：

$$\begin{aligned} \omega_1\cdots\omega_n &= (\sum b_{1j}\sigma_j)\cdots(\sum b_{nj}\sigma_j) = |b_{ij}|\sigma_1\cdots\sigma_n \\ &= K\sigma_1\cdots\sigma_n. \end{aligned}$$

多変数の函数 $\mathsf{v} = \mathsf{v}(y, z, \cdots)$ があるとする．ここで v はつねに M の接ベクトルの値をとるものとする．例えば，M 上の一つの曲線の各点に対して，その点での接ベクトルを対応させてもよい．そのとき 1 変数のベクトル値函数が生ずる．

M 上に束縛された観測者は，v の運動をどのように観測するであろうか？

$$\mathbf{v} = \sum c_i \mathbf{e}_i$$

と書く．$c_i$ 達は函数である．微分して次式を得る．

$$\begin{aligned} d\mathbf{v} &= \sum dc_i \mathbf{e}_i + \sum c_i d\mathbf{e}_i \\ &= \sum dc_i \mathbf{e}_i + \sum c_i \left(\sum \omega_{ij} \mathbf{e}_j - \omega_i \mathbf{n}\right) \\ &= \sum \left(dc_j + \sum c_i \omega_{ij}\right) \mathbf{e}_j - \left(\sum c_i \omega_i\right) \mathbf{n}. \end{aligned}$$

超曲面 M 上を動くように束縛されたわれわれの観測者は，M の法線方向に起るような v の運動を‘見る’ことはできない．彼が見るのは v の運動の接空間の部分だけである．その結果として，もし

$$\left(dc_j + \sum c_i \omega_{ij}\right) \mathbf{e}_j = 0,$$

すなわち

$$dc_j + \sum c_i \omega_{ij} = 0 \qquad (j=1, \cdots, n)$$

が成り立っていれば，彼は v が運動していないと信ずることになる．これらの方程式を満たすようなベクトル函数は，**平行移動**(parallel displacement)をしながら動くという．

これについて次の事が確かめられる．$\mathbf{v}=\mathbf{v}(y, z, \cdots)$ と $\mathbf{w}=\mathbf{w}(y, z, \cdots)$ を二つのベクトル値の函数であって，しかも両立している(すなわち，パラメーター空間の各点 $(y, z, \cdots)$ において，v と w とは M の同じ点での接ベクトルになっている)とし，かつどちらも平行移動しながら動くとする．すると内積 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ は定数である．特に $|\mathbf{v}|^2=\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ は定数である．

$P=P(s)$ を M 上の曲線とし，パラメーター $s$ はその弧長とする．従って

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(s) = \frac{dP}{ds}$$

は単位接ベクトルである．t が平行移動しながら動くとき，この曲線は**測地線**(geodesic)であるという．

行列 $\|b_{ij}\|$ を幾何学的に解釈することができる．それは極めて基本的である．位置ベクトル x のおのおのの特定の変位 $d\mathbf{x}$ に対して，単位法線ベクトル n の変位 $d\mathbf{n}$ が対応する．$d\mathbf{x}$ も $d\mathbf{n}$ も x での接空間中にあるから，対応

$$d\mathbf{x} \rightarrow d\mathbf{n}$$

を，この接空間の線型写像 $A$ とみなすことができる．もっと詳しくいえば，$\mathbf{v}$ を $\mathbf{x}$ での任意の接ベクトルとし，$\mathbf{x}$ を通る曲線 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$ であって，

$$\left.\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|_0 = \mathbf{v}$$

なるものを任意にとる．そして $\mathbf{x}$ がこの曲線上を動くとき，法線 $\mathbf{n}=\mathbf{n}(t)$ がどう変るかを見る．すると

$$\left.\frac{d\mathbf{n}}{dt}\right|_0 = A\mathbf{v}$$

が，われわれの $A$ の定義である．これが，曲線 $\mathbf{x}(t)$ のとり方には全く無関係である(この曲線が $t=0$ で前以て与えられた接ベクトル $\mathbf{v}$ をもつ限りでは)ことがわかる．何故ならば

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{e}_1+\cdots+c_n\mathbf{e}_n$$

とすれば

$$d\mathbf{x} = \sum \sigma_i \mathbf{e}_i$$

だから

$$\left.\frac{\sigma_i}{dt}\right|_0 = c_i.$$

一方

$$\left.\frac{d\mathbf{n}}{dt}\right|_0 = \sum \left.\frac{\omega_i}{dt}\right|_0 \mathbf{e}_i$$

である．さて，

$$\omega_i = \sum b_{ij}\sigma_j$$

だから，

$$\left.\frac{\omega_i}{dt}\right|_0 = \sum b_{ij}\left.\frac{\sigma_j}{dt}\right|_0 = \sum b_{ij}c_j$$

となり，求める結果

$$A(\sum c_i\mathbf{e}_i) = \sum (\sum b_{ij}c_j)\mathbf{e}_i$$

となる．これにより次のことが確立された．(1) $A$ は点 $\mathbf{x}$ での接空間を自身に写す‘良く定義された’ (well-defined)写像である．(2) $A$ は線型である．(3)

基底 e に関して，$A$ の行列表示は $\|b_{ij}\|$ である．

行列 $\|b_{ij}\|$ が対称だから，点 x での $n$ 次元接空間(それは Euclid 空間である)の 1 次変換 $A$ は，**自己随伴**(self-adjoint)である．すなわちどんな接ベクトルの対(つい) v, w に対しても

$$Av \cdot w = v \cdot Aw$$

となる．明らかに我々の $A$ の定義は，超曲面 M と，それが $E^{n+1}$ 中に埋め込まれている仕方にしか依存しない．動座標系 e の選び方には依存しないのである．従って，公式

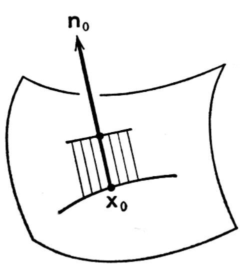
$$H = \frac{1}{n}\operatorname{trace}(A),$$

$$K = |A|$$

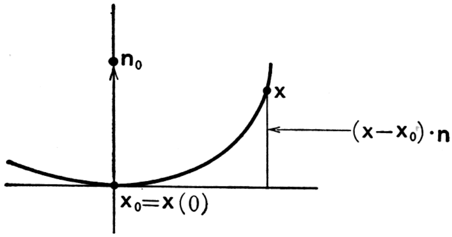
により，$H$ も $K$ も幾何学的な量であることがわかる．

$A$ が自己随伴だからその固有値はすべて実数である．これらを**主曲率**(principal curvature)という．対応する固有ベクトル達は(一般に) M 上に $n$ 個の方向場を定める．これらを**主方向**(principal direction)といい，その積分曲線を**曲率線**(line of curvature)という．

M の凸性は変換 $A$ の定値性を用いて解釈される．それを詳しくいうために，M を凸とし，n として内向きの単位法線をとる．




M 上に点 $x_0$ を固定し，対応する**法線切り口**(normal section)を作る．すなわち $n_0$ を通るような任意の(2次元の)平面と M との交線として生ずる曲線である．この曲線 $x = x(t)$ は，それがのっている平面上で凸である．




ということは函数

$$f(t)=(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)\cdot\mathrm{n}_0$$

が凸であることを意味する．従って

$$\left.\frac{d^2f}{dt^2}\right|_{t=0}\geqq 0$$

が満たされる．ところが

$$\frac{df}{dt}=\left(\frac{d\mathrm{x}(t)}{dt}\right)\cdot\mathrm{n}_0=\left(\sum\frac{\sigma_i}{dt}\mathrm{e}_i\right)\cdot\mathrm{n}_0,$$

$$\frac{d^2f}{dt^2}=\sum\frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma_i}{dt}\right)\mathrm{e}_i\cdot\mathrm{n}_0+\sum\left(\frac{\sigma_i}{dt}\right)\left(\frac{d\mathrm{e}_i}{dt}\right)\cdot\mathrm{n}_0$$

であり，さらに

$$\frac{d\mathrm{e}_i}{dt}\cdot\mathrm{n}_0=\sum\left(\frac{\omega_{ij}}{dt}\right)\mathrm{e}_j\cdot\mathrm{n}_0-\left(\frac{\omega_i}{dt}\right)\mathrm{n}\cdot\mathrm{n}_0$$

である．そして $\mathrm{x}(0)=\mathrm{x}_0$ での接ベクトル $\mathrm{e}_i(0)$ は法線 $\mathrm{n}(0)=\mathrm{n}_0$ に直交するから，上の条件は次の式に帰着する．

$$\sum\left.\left(\frac{\sigma_i}{dt}\right)\right|_0\left.\left(\frac{\omega_i}{dt}\right)\right|_0\leqq 0.$$

ところが $\omega_i=\sum b_{ij}\sigma_j$ であるから，

$$\sum b_{ij}\left.\left(\frac{\sigma_i}{dt}\right)\right|_0\left.\left(\frac{\sigma_j}{dt}\right)\right|_0\leqq 0$$

を得る．方向

$$\left.\left(\frac{\sigma_1}{dt},\cdots,\frac{\sigma_n}{dt}\right)\right|_0$$

は任意であるから，これから，行列

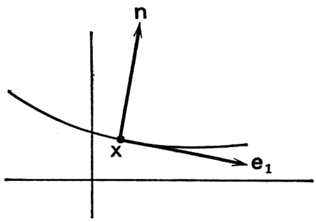
$$\|b_{ij}\|$$

は**負の半定値**(negative semi-definite)であることがわかる．従ってこの対称行列が表わす1次変換 $A$ も負の半定値である．

(符号の正しさは，可能な最も簡単な場合，すなわち，平面上の凸曲線の場合に検証される．通常の Frenet の公式は

$$\begin{cases} dx = ds e_1, \\ de_1 = \kappa\, ds n, \\ dn = -\kappa\, ds e_1 \qquad (s=\text{弧長}) \end{cases}$$

であるから，$\sigma_1=ds$, $\omega_1=-\kappa\, ds$, $b_{11}=-\kappa\leqq 0$.)




一般の状態に戻る．**曲率行列**(curvature matrix) $\Theta$ の成分 $\theta_{ij}$ を**曲率形式**(curvature form)という．

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2}\sum R_{ijkl}\sigma_k\sigma_l, \qquad R_{ijkl}+R_{ijlk} = 0$$

と書ける．これによって超曲面の **Riemann の曲率テンソル**(Riemann curvature tensor) $R_{ijkl}$ が定義される．関係式

$$\theta_{ij}+\omega_i\omega_j = 0$$

および

$$\omega_i\omega_j = \sum b_{ik}b_{jl}\sigma_k\sigma_l = \frac{1}{2}\sum (b_{ik}b_{jl}-b_{il}b_{jk})\sigma_k\sigma_l$$

により

$$R_{ijkl}+\begin{vmatrix} b_{ik} & b_{il} \\ b_{jk} & b_{jl} \end{vmatrix} = 0$$

を得る．これらの公式から代数的に次の関係が導かれる：

$$\begin{cases} R_{ijkl}+R_{ijlk}=0, \\ R_{ijkl}+R_{jikl}=0, \\ R_{ijkl}+R_{iklj}+R_{iljk}=0, \\ R_{ijkl}=R_{klij}. \end{cases}$$

これらはすべて容易に出る.

Riemann のテンソルは, M がどのように $E^{n+1}$ 中に埋めこまれているかには無関係であることを見よう. 従って, これらの関係は, **内在的**(intrinsic) な Riemann のテンソルを, 明らかに埋めこみ方に依存する量 $b_{ij}$ に結びつけるものとして, 特に興味深いのである.

実際, テンソル $R$ 達は $\sigma$ 達だけで定まり, 法線 n に言及しなくてもよいことが判明するのである. これは次のことを意味する: もし二つの超曲面 $M_1$ と $M_2$ の間に距離を保つような 1 対 1 の対応(すなわち, 対をなして対応する接超平面における Euclid 幾何学を保存するような対応) があれば, $M_1$ と $M_2$ とは同じ Riemann の曲率テンソルをもつ.

これから示すことは, 方程式

$$d\sigma=\sigma\Omega, \qquad \Omega+{}^t\Omega=0$$

が $\Omega$ を一意的に定め, 従って $\Omega$ は $\sigma$ 達のみによって完全に定まるということである. これは一般の Riemann 幾何学において述べた方が前後関係の調子がよいので, 証明は次節 157 頁まで延期する. この結果が得られれば

$$\Theta=d\Omega-\Omega^2$$

も $\sigma$ 達で完全に定まり, 従って Riemann のテンソルについても同様である.

いま, われわれの超曲面 M が $x^1, \cdots, x^n, u$-空間において

$$u=u(x^1, \cdots, x^n)$$

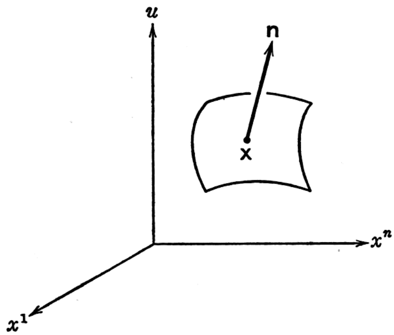
の形で与えられているという特別な場合をとり上げよう.

便利のため次のようにおく:

$$p_i=\frac{\partial u}{\partial x^i}, \qquad r_{ij}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}.$$

位置ベクトルは

$$\mathsf{x}=(x^1, \cdots, x^n, u)$$




であるから

$$\begin{aligned} d\mathrm{x} &= (dx^1, \cdots, dx^n, du) \\ &= (dx^1, \cdots, dx^n, \sum p_i dx^i) \\ &= \sum \mathrm{t}_i dx^i \end{aligned}$$

となる．ただしここで

$$\mathrm{t}_i = (\delta_{i1}, \cdots, \delta_{in}, p_i)$$

とおいた．ベクトル $\mathrm{t}_1, \cdots, \mathrm{t}_n$ は接ベクトルであり，明らかに接空間の基底をなす．しかし一般には接空間(＝接超平面)の正規直交系にはならない．

ベクトル

$$\mathrm{w} = (-p_1, \cdots, -p_n, 1)$$

は

$$\mathrm{w}\cdot\mathrm{t}_i = 0$$

を満たすから法線ベクトル($u$ 方向に正の成分をもつ)である．単位法線ベクトル $\mathrm{n}$ は

$$\mathrm{w} = w\mathrm{n}$$

で与えられる．ここで

$$w^2 = \mathrm{w}\cdot\mathrm{w} = 1+\sum p_i^2$$

である．次式に注意しておく．

$$w\,dw = \sum p_i dp_i = \sum p_i r_{ij} dx^j.$$

さて，基本的な1次変換 $A$ の，接超平面の基底 $\mathsf{t}_1, \cdots, \mathsf{t}_n$ に関する行列表示を定めよう．$(\mathsf{t}_i)$ が正規直交系でないから，一般にはこの行列は対称ではない．しかし，この行列の対角成分の和(＝トレース，trace)と行列式は，それぞれ $A$ のトレースと行列式を与える．これらの量は‘どんな’行列表示で計算してもよいからである．

求める行列を $\|a_{ij}\|$ とすれば，これは次式を意味する：

$$A\mathsf{t}_i = \sum a_{ij}\mathsf{t}_j.$$

$\mathsf{v}$ を任意の接ベクトルとすると，上式と $A$ の自己随伴性により

$$(A\mathsf{v})\cdot\mathsf{t}_i = (A\mathsf{t}_i)\cdot\mathsf{v} = \sum a_{ij}(\mathsf{t}_j\cdot\mathsf{v})$$

を得る．さて $A$ の定義自身に戻る．すなわち記号的に

$$A:\ d\mathsf{x} \to d\mathsf{n}$$

であるから，上の関係から次式を得る．

$$(d\mathsf{n})\cdot\mathsf{t}_i = \sum a_{ij}(d\mathsf{x}\cdot\mathsf{t}_j).$$

これらの等式から行列 $\|a_{ij}\|$ を定めるのである．

$$d\mathsf{w} = dw\mathsf{n} + w\,d\mathsf{n},$$
$$d\mathsf{w}\cdot\mathsf{t}_i = w(d\mathsf{n})\cdot\mathsf{t}_i \qquad (\because\quad \mathsf{n}\cdot\mathsf{t}_i = 0)$$

であるが，一方

$$\begin{aligned} d\mathsf{w}\cdot\mathsf{t}_i &= (-dp_1, \cdots, -dp_n, 0)\cdot(\delta_{i1}, \cdots, \delta_{in}, p_i) \\ &= -dp_i = -\sum r_{ij}dx^j \end{aligned}$$

であるから，次式を得る．

$$d\mathsf{n}\cdot\mathsf{t}_i = -\frac{1}{w}\sum r_{ij}dx^j.$$

一方，

$$\begin{aligned} d\mathsf{x}\cdot\mathsf{t}_j &= (dx^1, \cdots, dx^n, du)\cdot(\delta_{j1}, \cdots, \delta_{jn}, p_j) \\ &= dx^j + p_j du = dx^j + p_j \sum p_k dx^k \\ &= \sum_k (\delta_{jk} + p_j p_k)\,dx^k \end{aligned}$$

である．従って次式を得る．

$$\sum a_{ij}(\delta_{jk}+p_j p_k)\,dx^k = -\frac{1}{w}\sum r_{ik}dx^k,$$

$$\sum a_{ij}(\delta_{jk}+p_j p_k) = -\frac{1}{w}r_{ik}.$$

いま

$$R = \|r_{ik}\|, \qquad \mathsf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \qquad A = \|a_{ij}\|$$

とおけば，上式は次のように書ける：

$$A(I+\mathsf{p}\,{}^t\mathsf{p}) = -\frac{1}{w}R, \qquad A = -\frac{1}{w}R(I+\mathsf{p}\,{}^t\mathsf{p})^{-1}.$$

さて

$$\mathsf{p}\,{}^t\mathsf{p} = \sum p_i^2 = w^2-1$$

であるから

$$(I+\mathsf{p}\,{}^t\mathsf{p})\left(I-\left(\frac{1}{w^2}\right)\mathsf{p}\,{}^t\mathsf{p}\right) = I+\mathsf{p}\,{}^t\mathsf{p}-\left(\frac{1}{w^2}\right)\mathsf{p}\,{}^t\mathsf{p}-\frac{w^2-1}{w^2}\mathsf{p}\,{}^t\mathsf{p} = I.$$

よって

$$(I+\mathsf{p}\,{}^t\mathsf{p})^{-1} = I-\left(\frac{1}{w^2}\right)\mathsf{p}\,{}^t\mathsf{p}$$

となり，結局次式を得る．

$$A = -\frac{1}{w}R\left(I-\left(\frac{1}{w^2}\right)\mathsf{p}\,{}^t\mathsf{p}\right).$$

トレースをとれば平均曲率 $H$ がわかる：

$$H = \frac{1}{n}\operatorname{trace}(A) = -\frac{1}{nw}\operatorname{trace}\left(R-\frac{1}{w^2}R\mathsf{p}\,{}^t\mathsf{p}\right)$$

$$= -\frac{1}{nw}\left[\sum r_{ii}-\left(\frac{1}{w^2}\right)\sum p_i r_{ij} p_j\right]$$

$$= -\frac{1}{nw}\left[\Delta u-\frac{1}{w^2}\sum p_i r_{ij} p_j\right].$$

ここで $\Delta u$ は $u$ のラプラシアンである．

Gauss 曲率 $K$ は行列式をとればわかる：

$$K=|A|=\frac{(-1)^n}{w^n}|R|\,|I+\mathrm{p}\,{}^t\mathrm{p}|^{-1}.$$

さてちょっと計算すれば

$$|I+\mathrm{p}\,{}^t\mathrm{p}|=w^2$$

がわかる†．従って次の公式を得る．

$$K=\frac{(-1)^n}{w^{n+2}}|R|.$$

特別な場合として，曲面の場合 ($n=2$) を考える．Monge の標準的な記号

$$p=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad q=\frac{\partial u}{\partial y},\qquad r=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad s=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\qquad t=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

を用いると，

$$w^2=1+p^2+q^2,$$

$$\begin{aligned}H&=\frac{-1}{2w^3}[w^2(r+t)-(p^2r+2pqs+q^2t)]\\&=\frac{-1}{2w^3}[(1+p^2+q^2)(r+t)-(p^2r+2pqs+q^2t)]\\&=\frac{-1}{2w^3}[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t],\end{aligned}$$

および

$$K=\frac{rt-s^2}{w^4}$$

を得る．どちらもよく知られた公式である．

## 8.3 Riemann 幾何学．局所理論

ここで述べる問題は，Euclid 空間の一部分とはならぬような多様体の内的な幾何学を取り扱うことである．もし仮に多様体が Euclid 空間の一部分なら

---

† $$\mathrm{e}_1=(1,0,\cdots,0),\quad \mathrm{e}_2=(0,1,\cdots,0),\quad\cdots,\quad \mathrm{e}_n=(0,0,\cdots,0,1)$$

とおけば

$$\begin{aligned}|I+\mathrm{p}\,{}^t\mathrm{p}|&=|\mathrm{e}_1+p_1\,{}^t\mathrm{p},\cdots,\mathrm{e}_n+p_n\,{}^t\mathrm{p}|\\&=|\mathrm{e}_1,\cdots,\mathrm{e}_n|+\sum p_i|\mathrm{e}_1,\cdots,\mathrm{e}_{i-1},{}^t\mathrm{p},\mathrm{e}_{i+1},\cdots,\mathrm{e}_n|\\&=1+\sum p_i^2=w^2.\end{aligned}$$

ば，それは局所的 Euclid 幾何学(距離函数)を，それを包括している空間の幾何学から相続するであろう．それは上の最後の節で論じた超曲面の場合と同様である．しかし Euclid 空間の一部分にはならぬ多様体の場合だから，局所的な計量幾何学(距離幾何学)の存在を公理としてあげねばならない．その結果としてすることは，あらかじめ，各接空間が内積をもち，それは滑らかと仮定することである．

かくして，$\mathsf{M}$ を $n$ 次元多様体とし，$\mathsf{M}$ の各点 $P$ における接空間に内積が与えられていると仮定する．かくして，$\mathbf{v}$ と $\mathbf{w}$ とが同じ点 $P$ での接ベクトルならば，$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ は実数である．内積は次の意味で滑らかと仮定する：$\mathbf{v}$ と $\mathbf{w}$ とが $\mathsf{M}$ 上のベクトル場ならば，$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ は $\mathsf{M}$ 上の滑らかな函数である．(詳しくいえば，$\mathsf{M}$ の各点 $P$ において，与えられたベクトル場 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ の $P$ での値 $\mathbf{v}_P, \mathbf{w}_P$ は $P$ での接ベクトルである．よって内積 $\mathbf{v}_P\cdot\mathbf{w}_P$ が考えられるが，要請しているのは $\mathbf{v}_P\cdot\mathbf{w}_P$ が $P$ の滑らかな函数になるということである.)

正規直交系を見出すための 2.5 節のやり方(17-18 頁)は，各段階で構成的な滑らかな操作にできる．既知のように，$\mathsf{M}$ 上のどの局所的座標近傍においても，$n$ 個のベクトル場が存在して，その近傍の各点での接空間の基底をなす．これらのベクトル場を正規直交系に直して，滑らかなベクトル場

$$\mathbf{e}_1,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n$$

に達する．これらは問題の局所座標近傍上で定義され，

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

を満足している．

暫くの間，われわれは多様体 $\mathsf{M}$ 上に束縛された観測者である振りをしよう．そして何かある記号的・象徴的な航海に出発しよう，その中に正しい段階を動機づけることを願いながら．$P$ で $\mathsf{M}$ 上の動点を示し，その任意の変位 $dP$ を，微分形式を係数(成分)にもった接ベクトルとして考えてみることを願望しよう．そこで次のように書くことに望みをかける：

$$\mathrm{d}P = \sum \sigma_i \mathbf{e}_i.$$

ここで $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ はわれわれの近傍上の 1 次の微分形式である．($\mathrm{d}P$ は如何な

る意味でも，何者かの外微分というわけではないから，この $\mathbf{d}$ を普通の $d$ と区別してゴシック体(太字)で書く．以下述べる $\mathbf{de}_i$ についても同様である.) 1-形式達に対して $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ が基底になることを期待し，これらが或る意味で正規直交系をなし，ベクトルの基底 $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ に双対的であることを期待するのである.

われわれは Euclid 空間における経験によって案内されねばならない．そこでは座標系 $u^1, \cdots, u^n$ をとり，躊躇せずに

$$\mathbf{d}P = \sum du^i\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)$$

と書くであろう．ここでベクトル

$$\frac{\partial}{\partial u^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial u^n}$$

達は，座標系に同伴する自然基底である．しかし，正にこのことが $\mathbf{M}$ 上で実行可能なのである．次の式

$$\mathbf{d}P = \sum du^i\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)$$

は，局所座標系にはよらない．実際，$\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^n$ を他の座標系とすれば，

$$d\bar{u}^i = \sum \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j} du^j,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}^i}\right) = \sum \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^i}\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right)$$

により

$$\sum d\bar{u}^i\left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}^i}\right) = \sum \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j}\frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^i} du^j\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right)$$

$$= \sum \delta_j{}^k du^j\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right) = \sum du^j\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)$$

となる．すなわち，$\mathbf{d}P$ はどちらで計算しても同じである.

これが得られたから，自然基底を正規直交系で表わして

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \sum a_{ij}\mathbf{e}_j$$

とし，次式を $\sigma_j$ について解く：

$$\sum du^i\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \mathrm{d}P = \sum \sigma_j \mathbf{e}_j,$$

すると

$$\sum du^i a_{ij}\mathbf{e}_j = \sum \sigma_j \mathbf{e}_j.$$

すなわち次式を得る．

$$\sigma_j = \sum a_{ij} du^i.$$

これで，局所 Riemann 幾何学の第一の構造方程式

$$\mathrm{d}P = \sum \sigma_i \mathbf{e}_i$$

に達した．

次の‘山勘’は動座標系のベクトルの変位 $\mathbf{de}_i$ に対する方程式の類似物を作る試みである．ここでは曲面や超曲面についてなしたことからは本質的に外れねばならない．われわれは M に束縛され，どんな‘法線方向’においても何等の出来事も見ることが出来ないという単純な理由のため，われわれの注意を $\mathbf{de}_i$ の‘接成分’に限定せねばならないのである．かくして，1-形式 $\omega_{ij}$ を含む式

$$\mathbf{de}_i = \sum \omega_{ij}\mathbf{e}_j$$

を探究することになる．そのような $\omega_{ij}$ 達を，次の条件と合うように見出すことを試みよう．

(1) $$\mathbf{de}_i\cdot\mathbf{e}_k + \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{de}_k = 0,$$

(2) $$\mathrm{d}(\mathrm{d}P) = 0.$$

式(1)の理由は，$d(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_k) = d(\delta_{ik}) = 0$ であり，そして，われわれは内積を普通の積の法則で‘微分する’ことを望んでいるのである．(2)を選ぶに際しては，Euclid 空間での類似に従ったに過ぎない．さて例の如く(1)は次式に帰着する．

(1′) $$\omega_{ik} + \omega_{ki} = 0.$$

条件(2)を調べよう：

$$\mathrm{d}\left(\sum \sigma_i \mathbf{e}_i\right) = 0,$$

$$\sum d\sigma_i \mathbf{e}_i - \sum \sigma_i \mathbf{de}_i = 0,$$

$$\sum \left(d\sigma_j - \sum \sigma_i \omega_{ij}\right)\mathbf{e}_j = 0$$

であるから，(2)は次式に同値である．

(2′)
$$d\sigma_j = \sum \sigma_i\omega_{ij}.$$

かくしてわれわれはやっと，きちんと定式化された問題に達した：1-形式達の基底 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ が与えられたとき，1-形式 $\omega_{ij}$ 達を見出して，次式を満足させよ．

$$\begin{cases} (1') & \omega_{ij}+\omega_{ji} = 0, \\ (2') & d\sigma_i = \sum \sigma_j\omega_{ji}. \end{cases}$$

**この問題がちょうど一つの解をもつ**ことを示そう．(それにより，前節 149 頁で未解決に残した点が完了する.)

$\sigma_i$ 達が基底をなすから

$$\omega_{ij} = \sum \Gamma_{ijk}\sigma_k$$

と書ける．ここで(未知の)函数 $\Gamma_{ijk}$ 達は**接続の係数**(connection coefficients)或いは **Christoffel の記号**(Christoffel symbols)と呼ばれている．(1′)は次式に同値である．

(1″)
$$\Gamma_{ijk}+\Gamma_{jik} = 0.$$

$\sigma_i$ 達は知られているから，$d\sigma_i$ 達も知られている．よって

$$d\sigma_i = \frac{1}{2}\sum c_{ijk}\sigma_j\sigma_k, \qquad c_{ijk}+c_{ikj} = 0$$

と書ける．すると

$$d\sigma_i = \frac{1}{2}\sum c_{ijk}\sigma_j\sigma_k = \sum \sigma_j\omega_{ji}$$
$$= \sum \sigma_j \sum \Gamma_{jik}\sigma_k = \frac{1}{2}\sum (\Gamma_{jik}-\Gamma_{kij})\sigma_j\sigma_k$$

であるから，(2′)は次式に同値である．

(2″)
$$\Gamma_{jik}-\Gamma_{kij} = c_{ijk}.$$

するといまや正確な陳述は次のようになる：

**$c_{ijk}+c_{ikj}=0$ を満たす函数 $c_{ijk}$ 達が与えられたとき，連立 1 次方程式**

$$\begin{cases} \Gamma_{ijk}+\Gamma_{jik} = 0, \\ \Gamma_{jik}-\Gamma_{kij} = c_{ijk} \end{cases}$$

**は解を一意的にもつ．そしてその解は次の通り．**

$$\Gamma_{ijk}=\frac{1}{2}(c_{kij}-c_{jki}-c_{ijk}).$$

何故ならば，$\Gamma_{ijk}$ が解ならば，方程式を交互に使って次式が導かれる．

$$\begin{aligned}\Gamma_{ijk}&=-\Gamma_{jik}=-\Gamma_{kij}-c_{ijk}\\&=\Gamma_{ikj}-c_{ijk}=\Gamma_{jki}+c_{kij}-c_{ijk}\\&=-\Gamma_{kji}+c_{kij}-c_{ijk}=-\Gamma_{ijk}-c_{jki}+c_{kij}-c_{ijk},\end{aligned}$$

よって

$$2\Gamma_{ijk}=c_{kij}-c_{jki}-c_{ijk}$$

となる．これで解の一意性が確立された．上に主張された $\Gamma_{ijk}$ の値が実際に解になることは容易に確かめられる．

これで次の構造方程式が完成した．

$$\left\{\begin{aligned}\mathrm{d}P&=\sigma\mathbf{e},\\\mathrm{d}\mathbf{e}&=\Omega\mathbf{e},\\\Omega+{}^t\Omega&=0.\end{aligned}\right.$$

ただし次の行列記法を用いた．

$$\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n),\qquad \mathbf{e}=\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\\vdots\\\mathbf{e}_n\end{pmatrix},\qquad \Omega=\|\omega_{ij}\|.$$

そして既に一つの積分可能条件

$$d\sigma=\sigma\Omega$$

が得られた．

さて，如何なる意味においても $\mathrm{d}(\mathrm{d}\mathbf{e})=0$ となることを信ずる理由はない．

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2\mathbf{e}=\mathrm{d}(\mathrm{d}\mathbf{e})&=\mathrm{d}(\Omega\mathbf{e})=(d\Omega)\mathbf{e}-\Omega(\mathrm{d}\mathbf{e})\\&=(d\Omega-\Omega^2)\mathbf{e}\end{aligned}$$

であるから，

$$\Theta=\|\theta_{ij}\|=d\Omega-\Omega^2$$

とおいて**曲率行列**(curvature matrix)を導入すれば，次の象徴的な方程式が得られる：

$$\mathrm{d}^2\mathrm{e} = \Theta\mathrm{e}.$$

この式では $\Theta$ は‘第2階微分係数’を表わしている――それは正に初等微分幾何学において人が曲率について考えている内容である．

微分することによりさらに積分可能条件を導こう．

$$d\sigma = \sigma\Omega$$

から次式を得る．

$$\begin{aligned} 0 = d(d\sigma) &= (d\sigma)\Omega - \sigma(d\Omega) \\ &= (\sigma\Omega)\Omega - \sigma(d\Omega), \end{aligned}$$

よって

$$\sigma\Theta = 0$$

を得る．次に

$$\Theta = d\Omega - \Omega^2$$

から次式を得る．

$$\begin{aligned} d\Theta &= d(d\Omega) - d(\Omega^2) \\ &= 0 - (d\Omega)\Omega + \Omega(d\Omega) \\ &= -(\Theta + \Omega^2)\Omega + \Omega(\Theta + \Omega^2). \end{aligned}$$

従って次式を得る．

$$d\Theta = \Omega\Theta - \Theta\Omega.$$

これは **Bianchi の恒等式**(Bianchi identity)と呼ばれる等式群をまとめて書いたものである．

以上をまとめる．

| **構造方程式** | **積分可能条件** |
|---|---|
| $\left\{\begin{aligned} \mathrm{d}P &= \sigma\mathrm{e} \\ \mathrm{de} &= \Omega\mathrm{e} \\ \Omega + {}^t\Omega &= 0 \\ \Theta &= d\Omega - \Omega^2 \end{aligned}\right\}$ | $\left\{\begin{aligned} d\sigma &= \sigma\Omega \\ \sigma\Theta &= 0 \\ d\Theta &= \Omega\Theta - \Theta\Omega \end{aligned}\right\}$ |

$n$-形式 $\sigma_1\cdots\sigma_n$ を M の**体積要素**(volume element)という．これは符号を除いて定まる．もし M に向きがつけられていれば，向きづけと合った動標構だ

けを考えることによって，符号も定められる．

$\theta_{ij}$ 達は 2-形式であって次のように書ける．

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2}\sum R_{ijkl}\sigma_k\sigma_l.$$

これにより **Riemann の曲率テンソル**(Riemann curvature tensor) $R_{ijkl}$ が定義され，次の性質がわかる．

$$R_{ijkl}+R_{ijlk} = 0,$$
$$R_{ijkl}+R_{jikl} = 0.$$

関係 $\sigma\Theta=0$，すなわち

$$\sum R_{ijkl}\sigma_i\sigma_k\sigma_l = 0$$

は次式に同値である．

$$R_{ijkl}+R_{iklj}+R_{iljk} = 0.$$

超曲面という特別の場合には，対称条件

$$R_{ijkl} = R_{klij}$$

を，$R_{ijkl}$ に対する2次の小行列式としての表示(148頁参照)からの明らかな帰結として得たのであるが，そのような行列式表示はいまの一般的状態では不可能である．しかし結局の所，この Riemann のテンソルの対称性は成り立つことが判るのである．それは他の関係式から代数的に導かれるのである．すなわち

$$\begin{aligned}(R_{ijkl}-R_{klij}) &= R_{ijkl}+(R_{kijl}+R_{kjli})\\ &= (R_{ijkl}+R_{iklj})-R_{jkli}\\ &= -R_{iljk}-R_{jkli}\\ &= R_{lijk}+(R_{jlik}+R_{jikl})\\ &= (R_{lijk}+R_{ljki})+R_{jikl}\\ &= -R_{lkij}+R_{jikl}\\ &= -(R_{ijkl}-R_{klij}).\end{aligned}$$

従って

$$2(R_{ijkl}-R_{klij}) = 0$$

となり，これから問題の対称性が出る.

古典的なテンソル記法で Riemann 幾何学の修業を積んだ人々は，上記との関連を見たいと望まれるであろう．テンソル解析では，局所座標系 $(u^1, \cdots, u^n)$ に基づく自然標構

$$\mathsf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}, \quad \cdots, \quad \mathsf{v}_n = \frac{\partial}{\partial u^n}$$

を扱う.

$$g_{ij} = \mathsf{v}_i \cdot \mathsf{v}_j$$

とおいて，正定値の対称行列(計量テンソル)

$$G = \|g_{ij}\|$$

を定義する．通常は，その代りに，対応する定値2次形式

$$ds^2 = \sum g_{ij}[du^i du^j]$$

を考える．ここでブラケット[ ]はこの微分の積が外積ではなくて，普通の積であることを忘れないための記号である．上式の動機は，曲線 $u^i = u^i(t)$ の弧長の公式

$$s = \int \left[ \sum g_{ij} \left( \frac{du^i}{dt} \right) \left( \frac{du^j}{dt} \right) \right]^{1/2} dt$$

である.

さて，

$$\mathsf{d}P = \sum du^i \mathsf{v}_i$$

であるが，

$$\mathsf{d}\mathsf{v}_i = \sum \eta_i{}^j \mathsf{v}_j$$

とおいて，$\eta_i{}^j$ の決定を試み，そして Christoffel の記号(この自然標構での) $\begin{Bmatrix} j \\ i\,k \end{Bmatrix}$ を次式によって導入しよう.

$$\eta_i{}^j = \sum \begin{Bmatrix} j \\ i\,k \end{Bmatrix} du^k.$$

さて，

$$dg_{ij} = \mathsf{d}\mathsf{v}_i \cdot \mathsf{v}_j + \mathsf{v}_i \cdot \mathsf{d}\mathsf{v}_j$$

と

$$0 = \mathrm{d}(\mathrm{d}P) = -\sum du^i \mathrm{d}\mathbf{v}_i$$

とから次の 2 式が成立せねばならない.

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \sum \begin{Bmatrix} l \\ i\,k \end{Bmatrix} g_{lj} + \sum \begin{Bmatrix} l \\ j\,k \end{Bmatrix} g_{il},$$

$$\begin{Bmatrix} j \\ i\,k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j \\ k\,i \end{Bmatrix}.$$

添数を下げて

$$[i, j\,k] = \sum \begin{Bmatrix} l \\ j\,k \end{Bmatrix} g_{il}$$

とおけば，上の等式は次のようになる.

$$[j, i\,k] + [i, j\,k] = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k},$$

$$[j, i\,k] = [j, k\,i].$$

これから通常の解

$$[i, j\,k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\right)$$

が得られ，従って $\begin{Bmatrix} j \\ i\,k \end{Bmatrix}$ の値は云々という訳である.

ちょっとわき道にそれて，簡潔に平行移動を考える. $\mathbf{v}$ を M 上の接ベクトルとし，$\mathbf{v}$ は 1 変数または多変数の函数とする.

$$\mathbf{v} = \sum c_i \mathbf{e}_i$$

とおく. $c_i$ 達は函数である. すると

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{v} &= \sum dc_i \mathbf{e}_i + \sum c_i \omega_{ij} \mathbf{e}_j \\ &= \sum (dc_j + \sum c_i \omega_{ij}) \mathbf{e}_j \end{aligned}$$

となる. $\mathrm{d}\mathbf{v}=0$ のとき，すなわち

$$dc_j + \sum c_i \omega_{ij} = 0$$

のとき，ベクトル $\mathbf{v}$ は平行移動する(平行移動しながら動く)という. $\mathrm{d}\mathbf{v}$ のこの解釈の下で，両立する二つのベクトル函数 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ に対して

$$d(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) = (\mathrm{d}\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} + \mathbf{v}\cdot(\mathrm{d}\mathbf{w})$$

を得る. 従って, v も w も平行移動すれば, v·w は定数である. その微分が 0 となるからである.

M 上の曲線 $P=P(s)$ ($s$ は弧長)は, その単位接ベクトル $\mathrm{d}P/ds$ が平行移動するとき, **測地線**(geodesic)という.

**例** 上半平面に次の計量(Poincaré 計量と呼ばれる)

$$ds^2 = \frac{[dx]^2+[dy]^2}{y^2}$$

を導入したものを考える. ここでは

$$\sigma_1 = \frac{dx}{y}, \qquad \sigma_2 = \frac{dy}{y}$$

である. 位置ベクトルは $P=(x, y)$ であるから

$$\mathrm{d}P = (dx, dy) = \sigma_1\mathbf{e}_1+\sigma_2\mathbf{e}_2.$$

従って次式を得る.

$$\mathbf{e}_1 = (y, 0), \qquad \mathbf{e}_2 = (0, y).$$

さて

$$d\sigma_1 = \frac{dxdy}{y^2} = \sigma_1\sigma_2, \qquad d\sigma_2 = 0,$$

よって

$$(d\sigma_1, d\sigma_2) = (\sigma_1, \sigma_2)\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix},$$

よって

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Theta = d\Omega-\Omega^2 = \begin{pmatrix} 0 & d\sigma_1 \\ -d\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\sigma_1\sigma_2$$

となるから, 曲率テンソルの成分のうち意味のあるのは(0 でないのは)

$$R_{1212} = 1$$

だけである.

曲面を論じたとき, われわれは Gauss 曲率 $K$ に対して $d\varpi+K\sigma_1\sigma_2=0$ と書いた. ここでは妥当な解釈をすれば, $\varpi=\omega_{12}=\sigma_1$, $K=-R_{1212}=-1$ である.

この理由で，Poincaré 計量をもった上半平面は**負の定曲率をもつ**という．

$x$ 軸に直交する各半円

$$P = (a + r\cos t,\ r\sin t) \qquad (0 < t < \pi)$$

が測地線であることを示そう．座標で書けば

$$x = a + r\cos t, \qquad y = r\sin t$$

で与えられるから，接ベクトルは

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P}{dt} &= r(-\sin t, \cos t)\\ &= \frac{r}{y}[(-\sin t)\mathrm{e}_1 + (\cos t)\mathrm{e}_2]\\ &= \frac{1}{\sin t}[(-\sin t)\mathrm{e}_1 + (\cos t)\mathrm{e}_2]\end{aligned}$$

となる．よって弧長 $s$ に対して次式を得る．

$$\frac{ds}{dt} = \left[\frac{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}{\sin^2 t}\right]^{1/2} = \frac{1}{\sin t},$$

$$\mathrm{t} = \frac{\mathrm{d}P}{ds} = (-\sin t)\mathrm{e}_1 + (\cos t)\mathrm{e}_2.$$

曲線に沿って次式を得る．

$$\omega_{12} = \sigma_1 = -dt,$$

$$\mathrm{de}_1 = -(dt)\mathrm{e}_2, \qquad \mathrm{de}_2 = (dt)\mathrm{e}_1,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{dt} &= \mathrm{d}[(-\sin t)\mathrm{e}_1 + (\cos t)\mathrm{e}_2]\\ &= -(\cos t)\,dt\mathrm{e}_1 - (\sin t)\,dt\mathrm{e}_2 - (\sin t)(-dt\mathrm{e}_2) + (\cos t)(dt\mathrm{e}_1)\\ &= 0.\end{aligned}$$

すなわち単位接ベクトルは平行移動するから，この曲線は測地線である．

局所理論の終りに，7.3 節と 7.4 節の Frobenius の積分定理の応用を一つ与えよう．

**M を曲率テンソルが 0 なる Riemann 空間とすれば M は平坦(flat)である．すなわち，ある局所座標系 $u^1, \cdots, u^n$ が存在して，対応する自然基底**

$$\frac{\partial}{\partial u^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial u^n}$$

**が正規直交系をなす．**

証明は次の通り．$\Theta=0$ と仮定しているから $d\Omega=\Omega^2$．よって 7.4 節の例 1 により，函数行列 $A$ が存在して

$$(dA)A^{-1}=\Omega$$

を満たし，しかも $A$ は直交行列である．$\tau=(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ を $\tau=\sigma A$ で定義すれば

$$d\tau = d(\sigma A) = (d\sigma)A-\sigma\, dA = (\sigma\Omega)A-\sigma(\Omega A) = 0.$$

よって各 1-形式 $\tau_i$ は閉形式である：$d\tau_i=0$．よって局所的には完全である：すなわち

$$\tau_i = du^i$$

と書ける．これにより局所座標系 $(u^1, \cdots, u^n)$ が定義される．一方では

$$\mathrm{d}P = \sum du^i\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)$$

であり，他方では

$$\mathrm{d}P = \sigma\mathbf{e} = \tau A^{-1}\mathbf{e}$$

であるから，

$$\begin{pmatrix}\partial/\partial u^1\\ \vdots \\ \partial/\partial u^n\end{pmatrix} = A^{-1}\mathbf{e}$$

となる．基底 $\mathbf{e}$ は正規直交系で，行列 $A$ は直交行列だから，自然基底 $(\partial/\partial u^1, \cdots, \partial/\partial u^n)$ も正規直交系である．

## 8.4 Riemann 幾何学．調和積分

本節では，閉じた(すなわち，コンパクトな，境界のない) Riemann 多様体のポテンシャル論に関する W. V. D. Hodge の著しい結果を略述する．この仕事は微分形式のみに関係しているから，ベクトル場のことはすべて忘れてよい．このような気持から，新鮮な出発点から始め，必要となる Riemann 多様体に関する適切な事実を定式化し直す方がよい．これから論ずる多様体は向きづけ可能と前以て仮定する．従ってこのことが初めから構造の中にはめ込まれることになるであろう．

かくして，多様体 M を考える．互いに重なり合う近傍の系 $U_1, U_2, \cdots$ で M は覆われている．各 U 上に，1-形式達の基底

$$\sigma_1, \ \cdots, \ \sigma_n$$

がある．$\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ が U 上のその基底で，$\bar{\sigma}_1, \cdots, \bar{\sigma}_n$ が $\bar{U}$ 上の基底ならば，U と $\bar{U}$ とが交わる限り，次のような関係式が成り立たねばならぬ:

$$\bar{\sigma}_i = \sum a_{ij}\sigma_j.$$

ここで $A=\|a_{ij}\|$ は，固有の，すなわち行列式が 1 の直交行列である．

体積要素 $\sigma_1\cdots\sigma_n$ は

$$\bar{\sigma}_1\cdots\bar{\sigma}_n = |a_{ij}|\sigma_1\cdots\sigma_n = \sigma_1\cdots\sigma_n$$

により内在的(intrinsic)な量である．次に 2.7 節の星印作用素を適用する．各 $p$-形式 $\omega$ に対し，$(n-p)$-形式 $*\omega$ が対応する．局所的には

$$*(\sigma_1\cdots\sigma_p) = \sigma_{p+1}\cdots\sigma_n$$

である．次式を想起しよう．

$$**\omega = (-1)^{p(n-p)}\omega.$$

新しい作用素 $\delta$ を次式で定義する．

$$\delta\omega = (-1)^{np+n+1}*d*\omega.$$

符号の意義はやがて明らかとなるであろう．$\omega$ が $p$-形式なら $\delta\omega$ は $(p-1)$-形式であることに注意する．$\omega=f$ が 0-形式，すなわち函数ならば，$\delta f=0$ である．最後に定義する作用素は**調和作用素**(拡張されたラプラシアン) $\Delta$ である:

$$\Delta = d\circ\delta+\delta\circ d.$$

以下閉じた(コンパクトな)多様体に限って考察する．体積要素を $\tau$ と書く．これは M 上の $n$-形式で，いかなる所でも決して 0 にならず，そして局所的には $\tau=\sigma_1\cdots\sigma_n$ を満たす．

M 上の $p$-形式のなす空間を内積のある(無限次元の)空間にすることを考えよう．$\omega$ と $\eta$ が $p$-形式ならば，$\omega\wedge*\eta$ は $n$-形式である．内積を

$$(\omega, \eta) = \int_M \omega\wedge*\eta$$

で定義する．これは明らかに各変数について線型であり，しかも

$$\omega\wedge*\eta=\eta\wedge*\omega$$

により

$$(\omega,\eta)=(\eta,\omega)$$

を得る．局所的な表示が

$$\omega=\sum a_H\sigma^H$$

ならば

$$\omega\wedge*\omega=(\sum a_H^2)\tau$$

であるから

$$(\omega,\omega)\geqq 0$$

となる．しかも $(\omega,\omega)=0$ となるのは $\omega=0$ のとき，しかもそのときだけである．

さて次の基本的な補題を確立しよう．

**$\omega$ が $p$-形式で，$\eta$ が $(p+1)$-形式ならば**

$$(d\omega,\eta)=(\omega,\delta\eta).$$

何故なら，閉多様体 M 上で次の関係式

$$d\omega\wedge*\eta+(-1)^p\omega\wedge d*\eta=d(\omega\wedge*\eta)$$

を積分して

$$\int_M d\omega\wedge*\eta+(-1)^p\int_M\omega\wedge d*\eta=\int_M d(\omega\wedge*\eta)=\int_{\partial M}\omega\wedge*\eta=0,$$

すなわち

$$(d\omega,\eta)=(-1)^{p-1}\int_M\omega\wedge d*\eta$$

となる．$d*\eta$ は $(n-p)$-形式であるから

$$**(d*\eta)=*(*d*\eta)=(-1)^{p(n-p)}d*\eta$$

を得る．従って

$$(-1)^{p-1}d*\eta=(-1)^{p-1}(-1)^{p(n-p)}*(*d*\eta)$$
$$=(-1)^{np+1}*(*d*\eta).$$

ところが $\eta$ は $(p+1)$-形式だから

$$\delta\eta=(-1)^{n(p+1)+n+1}*d*\eta=(-1)^{np+1}*d*\eta$$

となる．従って

$$(-1)^{p-1}d*\eta = *\delta\eta$$

となり，よって

$$(d\omega, \eta) = (-1)^{p-1}\int_M \omega\wedge d*\eta$$
$$= \int_M \omega\wedge *(\delta\eta) = (\omega, \delta\eta).$$

微分形式 $\omega$ が

$$\Delta\omega = 0$$

を満たすとき，$\omega$ を**調和**(harmonic)であるという．$p$-形式 $\omega$ が $d\omega=0$, $\delta\omega=0$ を満たせば，明らかに $\omega$ は調和であるが，実は逆も成り立つのである．実際 $\omega$ を任意の $p$-形式とすれば，

$$(\Delta\omega, \omega) = (d\delta\omega, \omega) + (\delta d\omega, \omega)$$
$$= (\delta\omega, \delta\omega) + (d\omega, d\omega)$$

である．もし $\omega$ が調和ならば $\Delta\omega=0$ だから

$$(\delta\omega, \delta\omega) + (d\omega, d\omega) = 0$$

となる．左辺各項は負でないから，別々に 0 になる：$(d\omega, d\omega)=0$, $(\delta\omega, \delta\omega)=0$. これから $d\omega=0$, $\delta\omega=0$ が出る．

作用素 $d, \delta$ は $p$-形式の空間に作用している．関係 $(d\omega, \eta)=(\omega, \delta\eta)$ は $d$ と $\delta$ とが互いに他の随伴作用素であると解釈される．次に，$p$-形式達を $p$-形式達に写す作用素 $\Delta$ は自己随伴なることがわかる：

$$(\Delta\omega, \eta) = (\omega, \Delta\eta).$$

実際，両辺共に $(d\omega, d\eta)+(\delta\omega, \delta\eta)$ に等しいからである．$(\Delta\omega, \omega)\geqq 0$ であって等号が成り立つのは $\Delta\omega=0$ のときだけであるから，$\Delta$ を正定値(随円的)自己随伴微分作用素と呼ぶ資格があるわけである．

さていまや Hodge の主要結果を述べることができる．それは調和解析における深い定理である．

**任意の $p$-形式 $\omega$ に対して**，$(p-1)$-**形式** $\alpha$ **と**，$(p+1)$-**形式** $\beta$ **と，調和** $p$-**形式** $\gamma$ **が存在して**

$$\omega = d\alpha+\delta\beta+\gamma$$

**となる. 微分形式 $d\alpha, \delta\beta, \gamma$ は一意的である.**

$\alpha, \beta, \gamma$ が存在するという証明は難しい. 一意性だけを確定しよう. いま

$$d\alpha+\delta\beta+\gamma = 0$$

と仮定すれば, $d(d\alpha)=0$, $d\gamma=0$ ($\gamma$ は調和だから)により

$$d\delta\beta = 0,$$

$$(d\delta\beta, \beta) = 0,$$

$$(\delta\beta, \delta\beta) = 0,$$

$$\delta\beta = 0,$$

$$d\alpha+\gamma = 0$$

となる. 同様に $d\alpha=0$, $\gamma=0$ となる.

殆んど同一の論法により, $\omega$ が閉 $p$-形式: $d\omega=0$ ならば, $\omega$ の Hodge 分解中の項 $\delta\beta$ は出てこないことが示される:

$$\omega = d\alpha+\gamma.$$

従って, 任意の $p$-輪体 z に対して

$$\int_z \omega = \int_z \gamma$$

となる. すなわち, $\gamma$ は $\omega$ と同じ周期をもつ. (5.9節の De Rham の定理を見よ.) かくて次の結果に達する:

**任意の閉形式 $\omega$ に対して, $\omega$ と同じ周期をもつ調和形式 $\gamma$ が一意的に存在する.**

次の質問にも答えることができる. $p$-形式 $\lambda$ が与えられたとき, 方程式

$$\Delta\eta = \lambda$$

を満たすような $p$-形式 $\eta$ が存在するのはいつか? 答は各調和形式 $\gamma$ に対して

$$(\gamma, \lambda) = 0$$

のとき, かつこのときに限る——となる.

何故ならば, $\lambda=\Delta\eta$ とし, $\gamma$ を調和とすれば

$$(\gamma, \lambda) = (\gamma, \Delta\eta) = (\Delta\gamma, \eta) = (0, \eta) = 0$$

となる. 一方 $\lambda$ が各調和形式 $\gamma$ に対して $(\gamma, \lambda)=0$ を満たすとすれば, 分解

$$\lambda = d\alpha + \delta\beta + \gamma$$

から，$\lambda$ の成分である特別の $\gamma$ を使って次式を得る．

$$\begin{aligned} 0 &= (\gamma, \lambda) = (\gamma, d\alpha) + (\gamma, \delta\beta) + (\gamma, \gamma) \\ &= (\delta\gamma, \alpha) + (d\gamma, \beta) + (\gamma, \gamma) \\ &= (\gamma, \gamma), \end{aligned}$$

よって $\gamma=0$，従って

$$\lambda = d\alpha + \delta\beta$$

となる．$\eta=\mu+\nu$ とおき，$\Delta\mu=d\alpha$, $\Delta\nu=\delta\beta$ を別々に解くことを試みる．まず

$$\Delta\mu = d\alpha$$

をとる．$\alpha$ を分解して

$$\begin{aligned} \alpha &= d\alpha_1 + \delta\beta_1 + \gamma_1, \\ d\alpha &= d\delta\beta_1. \end{aligned}$$

次に

$$\begin{aligned} \beta_1 &= d\alpha_2 + \delta\beta_2 + \gamma_2, \\ d\delta\beta_1 &= d\delta d\alpha_2 = (d\delta + \delta d)(d\alpha_2) = \Delta(d\alpha_2), \end{aligned}$$

よって，$\mu=d\alpha_2$ とおけば $d\alpha=\Delta\mu$ が成り立つ．同様に，$\delta\beta=\Delta\nu$ の解 $\nu$ が見出される．

**例 1**　$E^n$．$E^n$ において作用素 $\Delta$ を計算しよう．前の章で標準的なラプラシアンを扱ったときの記号とは反するが，ラプラシアンを Lap と記す：

$$\mathrm{Lap}\, u = \sum u_{ii} = \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^i}.$$

すると求める結果は次の通り：

$$\omega = \sum a_H dx^H$$

ならば，

$$\Delta\omega = -\sum (\mathrm{Lap}\, a_H)\, dx^H.$$

これは単項式

$$\omega = A\, dx^1 \cdots dx^p$$

について証明すれば十分である．

計算を短縮するために次の規約をおく：

(1) $A$ の下付き添字は偏微分係数を示す.

(2) $\alpha=1, 2, \cdots, p$; $j=p+1, \cdots, n$

(3) 添字が繰返されていたら，その変域上で和をとる．また，単項式に星印作用素を適用する際，符号の選び方はつねに次の規則で運営されることに注意する：

$$\eta\wedge *\eta = B\,dx^1\cdots dx^n \qquad (B>0).$$

例えば

$$*(dx^\alpha dx^{p+1}\cdots\widehat{dx^j}\cdots dx^n) = (-1)^{np+p+\alpha+j}dx^1\cdots\widehat{dx^\alpha}\cdots dx^p dx^j.$$

もう一つの要点は次の通り．$\omega$ が $p$-形式で，$d\omega$ は $(p+1)$-形式であるから，

$$\delta\omega = (-1)^{np+n+1} * d * \omega,$$
$$\delta d\omega = (-1)^{np+1} * d * d\omega.$$

さて証明に入る．

$$*\,\omega = A\,dx^{p+1}\cdots dx^n,$$
$$d*\omega = A_\alpha dx^\alpha dx^{p+1}\cdots dx^n,$$
$$*\,d*\omega = (-1)^{np+n+\alpha+1}A_\alpha dx^1\cdots\widehat{dx^\alpha}\cdots dx^p,$$
$$\delta\omega = (-1)^\alpha A_\alpha dx^1\cdots\widehat{dx^\alpha}\cdots dx^p,$$
$$d\delta\omega = -A_{\alpha\alpha}dx^1\cdots dx^p + (-1)^{\alpha+p+1}A_{\alpha j}dx^1\cdots\widehat{dx^\alpha}\cdots dx^p dx^j.$$

次に

$$d\omega = A_j dx^j dx^1\cdots dx^p,$$
$$*\,d\omega = (-1)^{j+1}A_j dx^{p+1}\cdots\widehat{dx^j}\cdots dx^n,$$
$$d*d\omega = (-1)^p A_{jj}dx^{p+1}\cdots dx^n + (-1)^{j+1}A_{j\alpha}dx^\alpha dx^{p+1}\cdots\widehat{dx^j}\cdots dx^n,$$
$$*\,d*d\omega = (-1)^{np}A_{jj}dx^1\cdots dx^p + (-1)^{np+p+\alpha+1}A_{j\alpha}dx^1\cdots\widehat{dx^\alpha}\cdots dx^p dx^j,$$
$$\delta d\omega = -A_{jj}dx^1\cdots dx^p + (-1)^{p+\alpha}A_{j\alpha}dx^1\cdots\widehat{dx^\alpha}\cdots dx^p dx^j.$$

以上を合わせて

$$\Delta\omega = d\delta\omega + \delta d\omega = -[A_{\alpha\alpha}+A_{jj}]dx^1\cdots dx^p$$
$$= -(\mathrm{Lap}\,A)\,dx^1\cdots dx^p$$

となる．ここでマイナスの符号が出て来るのは，閉多様体上の

$$(\Delta\omega, \omega) \geqq 0$$

なる関係式と考え合わせると不思議に見える．この点を明らかにする一例をあげよう．平坦な 3 次元輪環体(torus) $0 \leqq x, y, z \leqq 2\pi$ 上の 0-形式 $\sin x$ をとろう．輪環体は $2\pi$ の整数倍の差しかない実数を同一視することによって，$\mathrm{E}^3$ から生ずるのである．すると

$$d(\sin x) = (\cos x)\,dx,$$

$$*d(\sin x) = (\cos x)\,dydz,$$

$$d*d(\sin x) = -(\sin x)\,dxdydz,$$

$$*d*d(\sin x) = -(\sin x),$$

$$\Delta(\sin x) = \delta d(\sin x) = +\sin x,$$

$$(\Delta(\sin x), \sin x) = (2\pi)^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx = (2\pi)^2 \pi > 0.$$

ここで，$d(\sin x)$ が 1-形式で，$n=3$, $p=1$ であることおよび

$$\delta[d(\sin x)] = (-1)^{np+n+1}(*d*)d(\sin x) = -*d*d(\sin x)$$

を使った．

**例 2**　$\mathrm{S}^2$．$\mathrm{E}^3$ 上の函数 $f$ に対して，ラプラシアンの球座標での形(4.4 節，50 頁)は既知である：

$$\mathrm{Lap}\, f = \frac{1}{r^2 \sin\phi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\phi \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\sin\phi \frac{\partial f}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\right].$$

いま $\mathrm{Lap}\, f = 0$ であり，かつ $f$ は次の形とする：

$$f(r, \phi, \theta) = r^n g(\phi, \theta).$$

このとき函数 $g$ を $n$ 次の**球面調和函数**(spherical harmonic)という．そのような $g$ は次の方程式を満たさねばならない．

$$n(n+1)(\sin\phi)g + \frac{\partial}{\partial \phi}[(\sin\phi)g_\phi] + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{g_\theta}{\sin\phi}\right) = 0.$$

函数 $g$ は，単位球面 $\mathrm{S}^2$ 上の函数すなわち 0-形式と考えられる．$\mathrm{S}^2$ 上では

$$\sigma_1 = d\phi, \qquad \sigma_2 = \sin\phi\, d\theta,$$

$$dg = g_\phi \sigma_1 + \left(\frac{g_\theta}{\sin\phi}\right)\sigma_2,$$

$$*dg = \left(\frac{-g_\theta}{\sin\phi}\right)\sigma_1 + g_\phi\sigma_2$$
$$= -\left(\frac{g_\theta}{\sin\phi}\right)d\phi + (\sin\phi)g_\phi d\theta,$$
$$d*dg = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{g_\theta}{\sin\phi}\right)d\phi d\theta + \frac{\partial}{\partial\phi}[(\sin\phi)g_\phi]d\phi d\theta$$
$$= \frac{1}{\sin\phi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{g_\theta}{\sin\phi}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}((\sin\phi)g_\phi)\right]\sigma_1\sigma_2,$$
$$*d*dg = \frac{1}{\sin\phi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{g_\theta}{\sin\phi}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}(g_\phi\sin\phi)\right].$$

一方,

$$\Delta g = (d\delta + \delta d)g = \delta dg = -*d*dg.$$

従って, $g$ が球面調和函数となる条件は

$$\Delta g - n(n+1)g = 0$$

となる. 換言すれば, 球面調和函数は, $S^2$ 上の拡張されたラプラシアンの固有函数である. 球面調和函数に関する通常の事実の多くがこの計算から出る. その一例として直交関係をとろう: **$g$ と $h$ が球面調和函数で, それぞれ相異なる次数 $m$ と $n$ とをもてば, $(g, h) = 0$.**

何故ならば, $\Delta g = m(m+1)g$, $\Delta h = n(n+1)h$ だから

$$(g, h) = \frac{1}{m(m+1)}(\Delta g, h) = \frac{1}{m(m+1)}(g, \Delta h)$$
$$= \frac{n(n+1)}{m(m+1)}(g, h),$$
$$(g, h) = 0.$$

## 8.5 アフィン接続

アフィン接続の問題へのアプローチを次のようにする. 多様体に構造をいれて, 曲線に沿ってのベクトルの平行移動ができるようにしたいのだが, その中で最も弱い(つまり複雑度の少い)構造を求めること. Riemann 空間の構造よりかなり少い構造しか要求されないのである.

M を多様体とする．M の近傍 U 上の**アフィン標構**(affine frame，或いは単に frame)とは U 上の $n$ 個のベクトル場 $\mathsf{e}_1, \cdots, \mathsf{e}_n$ であって，U の各点で 1 次独立なるものをいう．かくして，U の各点 $P$ において，ベクトル $(\mathsf{e}_1)_P, \cdots, (\mathsf{e}_n)_P$ は $P$ での接空間 T の基底をなす．U 上の 1-形式のなす双対基底 $\sigma^1, \cdots, \sigma^n$ があるから，8.3 節で Riemann 空間の場合にしたのと同様に

$$\mathrm{d}P = \sum \sigma^i \mathsf{e}_i$$

と書ける．

さて，M 上の各ベクトル場 v に対して，**1-形式を係数(成分)とするベクトル場** dv を対応させたい．基底のベクトル場 $\mathsf{e}_i$ についてもこれができるはずだから，次の要請をおく：

$$\mathrm{d}\mathsf{e}_i = \sum \omega_i{}^j \mathsf{e}_j.$$

ここで $\omega_i{}^j$ 達は近傍 U 上の 1-形式である．dv の計算が基底のとり方によらないことを保証するための，若干の首尾一貫性の条件がある．

局所的にはアフィン接続を次のように述べてよいであろう．U とアフィン標構 $\mathsf{e}_1, \cdots, \mathsf{e}_n$ と，1-形式の双対基底 $\sigma^1, \cdots, \sigma^n$ が与えられているとすれば，アフィン接続は，何等の束縛条件も課されていない $n^2$ 個の 1-形式 $\omega_i{}^j$ 達からなる．

多様体全域上でアフィン接続の定義を可能ならしめるような，正しい首尾一貫性条件を見出すという決定的な問題にとりかかる前に，アフィン接続の局所的幾何学の若干を展開しよう．

行列記号を導入する：

$$\mathsf{e} = \begin{pmatrix} \mathsf{e}_1 \\ \vdots \\ \mathsf{e}_n \end{pmatrix}, \qquad \sigma = (\sigma^1, \cdots, \sigma^n), \qquad \Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \cdots & \omega_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_{n1} & \cdots & \omega_{nn} \end{pmatrix}.$$

すると基本的な構造方程式は次のように書ける：

$$\mathrm{d}P = \sigma \mathsf{e}, \qquad \mathrm{d}\mathsf{e} = \Omega \mathsf{e}.$$

手短かに，上記の流儀によるアフィン接続と，慣行されているテンソル流の定式化との関係を指摘しよう．まず各 $\omega_i{}^j$ を基底 $\sigma^k$ について展開して

$$\omega_i{}^j = \sum \Gamma_i{}^j{}_k \sigma^k$$

とし，それにより**接続係数**(connection coefficient) $\Gamma_i{}^j{}_k$ を定義する．通常のテンソル的定式化においては，標構 $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ は局所座標系から派生している：

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial u^i}.$$

従って $\sigma^i = du^i$ である．そのとき $\Gamma_i{}^j{}_k = \Gamma_i{}^j{}_k(u^1, \cdots, u^n)$ 達は，$\mathsf{U}$ 上に与えられた $n^3$ 個の任意函数である．

構造方程式を数回微分して関係式を導く．まず

$$\mathrm{d}^2 P = (d\sigma)\mathbf{e} - \sigma(\mathrm{d}\mathbf{e}) = (d\sigma - \sigma\Omega)\mathbf{e} = \tau\mathbf{e}.$$

ただし

$$\tau = (\tau^1, \cdots, \tau^n) = d\sigma - \sigma\Omega$$

とおいた．2-形式 $\tau^i$ 達を**捩率形式**(torsion form)という．

$$\tau^i = \frac{1}{2}\sum T^i{}_{jk}\sigma^j \wedge \sigma^k, \qquad T^i{}_{jk} = -T^i{}_{kj}$$

と書ける．これにより**捩率係数**(torsion coefficient) $T^i{}_{jk}$ 達が定義される．次に

$$\mathrm{d}^2\mathbf{e} = (d\Omega)\mathbf{e} - \Omega(\mathrm{d}\mathbf{e}) = (d\Omega - \Omega^2)\,\mathbf{e} = \Theta\mathbf{e}.$$

ここで

$$\Theta = d\Omega - \Omega^2 = \|\theta_i{}^j\|$$

とおいた．$\theta_i{}^j$ を**曲率形式**(curvature form)という．**曲率テンソル**(curvature tensor) $R_i{}^j{}_{kl}$ は次式から得られる．

$$\theta_i{}^j = \frac{1}{2}\sum R_i{}^j{}_{kl}\sigma^k \wedge \sigma^l, \qquad R_i{}^j{}_{kl} = -R_i{}^j{}_{lk}.$$

等式 $\tau = d\sigma - \sigma\Omega$ と $\Theta = d\Omega - \Omega^2$ に外微分を適用して，積分可能条件が得られる：

$$\begin{aligned} d\tau &= (-d\sigma)\Omega + \sigma\, d\Omega \\ &= -(\tau + \sigma\Omega)\Omega + \sigma(\Theta + \Omega^2), \\ d\tau &= \sigma\Theta - \tau\Omega, \end{aligned}$$

および

$$d\Theta = (-d\Omega)\Omega + \Omega\, d\Omega$$

$$= -(\Theta+\Omega^2)\Omega+\Omega(\Theta+\Omega^2),$$

$$d\Theta = \Omega\Theta-\Theta\Omega.$$

**v** がベクトル場なら,

$$\mathbf{v} = \sum f^i\mathbf{e}_i = F\mathbf{e}, \qquad F = (f^1, \cdots, f^n)$$

となり, $f^i$ 達はスカラーである. すると

$$d\mathbf{v} = (dF)\mathbf{e}+F(d\mathbf{e}) = (dF+F\Omega)\mathbf{e}$$

となる. ベクトル場 **v** が部分多様体上で定義されているとする. もし $d\mathbf{v}=0$ が成り立つならば, すなわち

$$dF+F\Omega = 0$$

のとき, **v** は**平行移動する**(平行移動しながら動く)(move by parallel displacement)という. $P=P(t)$ を $t$ 軸上の区間 $t_0 \leqq t \leqq t_1$ の上で定義された, **U** 中の滑らかな曲線とする. $\mathbf{v}_0$ を点 $P_0=P(t_0)$ での接ベクトルとすれば, $t$ の各値に対して点 $P(t)$ での接ベクトル $\mathbf{v}(t)$ を定めて, $\mathbf{v}(t_0)=\mathbf{v}_0$ であって, しかも $\mathbf{v}(t)$ が平行移動するようにできる. しかもこのような定め方は一意的である.

何故ならば, $\mathbf{v}=\sum f^i\mathbf{e}_i$ と書けば, 曲線に沿っては平行移動の条件は

$$\frac{df^j}{dt}+\sum f^i\cdot\left(\frac{\omega_i{}^j}{dt}\right) = 0$$

となる. これは1階の連立線型常微分方程式であるから, 初期値により $f^i$ が一意的に定まる.

さて, 大域的状態を考えよう. われわれの前にあるのは一つの多様体 **M** であって, われわれは考え得るアフィン動標構 $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ のおのおのを, その定義近傍 **U** と共に考えねばならない. これらの **e** のおのおのに対して, **U** 上にアフィン接続, すなわち1-形式を成分とする $n$ 行 $n$ 列の行列 $\Omega$ があるとし, そのような二つの近傍が重なり合う所では, これらの接続が‘ぴったりと符合する’ようにしたいのである.

かくして, $(\mathbf{U}, \mathbf{e}, \sigma, \Omega)$ をそのような系の一つとし, $(\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{e}}, \bar{\sigma}, \bar{\Omega})$ をもう一つの系とする. ここで近傍 **U** と $\bar{\mathbf{U}}$ とは重なり合うとする. 要請する基礎的なことは, **U** と $\bar{\mathbf{U}}$ の交わりで定義された任意のベクトル場 **v** に対して, どちらの接

続で dv を計算しても生ずる結果が同一のものとなるということである.

近傍の交わりにおいて(以下つねにこの交わりにおいてのみ計算するが),

$$\bar{\mathrm{e}} = A\mathrm{e}$$

となる. ここで $A=\|a_i^j\|$ は行列式が 0 でない函数行列である.

$$\mathrm{d}P = \bar{\sigma}\bar{\mathrm{e}} = \sigma\mathrm{e}$$

であるから次式を得る.

$$\bar{\sigma}A\mathrm{e} = \sigma\mathrm{e},$$

$$\bar{\sigma} = \sigma A^{-1}.$$

さて

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\bar{\mathrm{e}} = \mathrm{d}(A\mathrm{e}) &= (dA)\mathrm{e}+A(\mathrm{de})\\ &= (dA+A\Omega)\mathrm{e}\\ &= (dA+A\Omega)A^{-1}\bar{\mathrm{e}}\end{aligned}$$

であり, 一方, $\mathrm{d}\bar{\mathrm{e}}=\bar{\Omega}\bar{\mathrm{e}}$ であるから, $\Omega$ の変換則が得られる:

$$\bar{\Omega} = A\Omega A^{-1}+(dA)A^{-1}.$$

これは σ の変換則とは全く異系統のものである. σ の変換則は多様体と標構の定義そのものから従わざるを得ないものである. 上式は, われわれが種々の動標構 e に結びつけている種々の行列 $\Omega$ が, アフィン接続を M 上に全域的に定義すべきとき, 如何に関係しあっていなければならないかを告げている.

これらの公式から, τ と $\Theta$ の変換則を導くことができる:

$$\bar{\tau} = \tau A^{-1},$$

$$\bar{\Theta} = A\Theta A^{-1}.$$

$\mathrm{v}=\bar{F}\bar{\mathrm{e}}=F\mathrm{e}$ がベクトル場ならば, $\bar{F}=FA^{-1}$ で,

$$\begin{aligned}&(d\bar{F}+\bar{F}\bar{\Omega})\bar{\mathrm{e}}\\ &\quad = (dF\cdot A^{-1}-FA^{-1}dA\cdot A^{-1})A\mathrm{e}+(FA^{-1})(A\Omega A^{-1}+dA\cdot A^{-1})A\mathrm{e}\\ &\quad = (dF+F\Omega)\mathrm{e}\end{aligned}$$

となる. 従って, dv はどちらの方法で計算しても同一である. (公式 $d(A^{-1}) = -A^{-1}(dA)A^{-1}$ を使った. 以下でも何度も使うであろう.)

さて, 目下の前後関係だけにおいて, 4.3 節の考察をもう一度眺めて見よう.

それによってアフィン接続なるものを眺めるもう一つの方法が得られるであろう．以下やろうとすることは，次の一般的なパターンと適合する：**一つの変換則に従う量は，適当に拡大した空間で考えれば絶対不変量となる**．

まず $n$ 次元多様体 M から出発して，新しく $(n+n^2)$ 次元の多様体 F を作る．この**標構多様体**(frame manifold)は M のすべての点でのあらゆる標構からなる．詳しくいえば，M の各点 $P$ で，$P$ での接空間 $\mathrm{T}_P$ のあらゆる可能な基底 $\mathrm{e}_1, \cdots, \mathrm{e}_n$ を考える．そしてこれをあらゆる点 $P$ について行なうのである．

F の座標系が次のようにして得られる．まず U を M 上の局所座標近傍とし $u^1, \cdots, u^n$ をその座標とする．F 上に動標構 $\mathrm{e}_1, \cdots, \mathrm{e}_n$ を一つきめる．かくして U の各点 $P$ において，$(\mathrm{e}_1)_P, \cdots, (\mathrm{e}_n)_P$ は $P$ での接空間 $\mathrm{T}_P$ の一つの基底である．$\mathrm{T}_P$ の最も一般の基底はこの与えられた基底から，任意の正則(行列式が 0 でない) 1 次変換を適用して生ずる．それは $\mathrm{f}_1, \cdots, \mathrm{f}_n$ の形で，

$$\mathrm{f}_i = \sum b_i{}^j (\mathrm{e}_j)_P$$

となり，$\|b_i{}^j\|$ は任意の $n$ 次正則行列である．これから明らかに，$(n+n^2)$ 個の独立変数

$$u^1, \cdots, u^n, b_i{}^j$$

が，U のあらゆる点 $P$ でのあらゆる標構からなる F 中の近傍に対して座標系の役をする．

U 上の動標構 $\mathrm{e}_1, \cdots, \mathrm{e}_n$ に付随して，U 上の 1-形式の双対基底 $\sigma^1, \cdots, \sigma^n$ がある．

$$\tilde{\sigma} = \sigma B^{-1},$$

$$\sigma = (\sigma^1, \cdots, \sigma^n), \qquad \tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}^1, \cdots, \tilde{\sigma}^n), \qquad B = \|b_i{}^j\|$$

で定義された微分形式 $\tilde{\sigma}^1, \cdots, \tilde{\sigma}^n$ は，U 上にのっている F の部分の上の 1-形式である．もっと詳しくいえば，微分形式 $\tilde{\sigma}^1, \cdots$ の，F の点 f での値は，f が

$$\mathrm{f}_i = \sum b_i{}^j (\mathrm{e}_j)_P$$

で与えられていれば，

$$\tilde{\sigma}|_{\mathrm{f}} = (\sigma|_P) B^{-1}$$

である．

いま $\bar{\mathsf{U}}$ を第二の座標で，$\bar{\mathsf{e}}$ は $\bar{\mathsf{U}}$ 上の動標構，等々とする．$P$ が $\mathsf{U}$ にも $\bar{\mathsf{U}}$ にも属するとすれば，

$$\bar{\mathsf{e}} = A\mathsf{e}.$$

$A$ は函数行列である．上に考えたように

$$\bar{\sigma} = \sigma A^{-1}$$

である．$\mathsf{F}$ の点 $\mathsf{f}$ が，$\mathsf{e}$ に関し座標 $B$ を，$\bar{\mathsf{e}}$ に関して座標 $\bar{B}$ をもてば

$$B\mathsf{e} = \bar{B}\bar{\mathsf{e}} = \bar{B}A\mathsf{e},$$

$$B = \bar{B}A.$$

かくして

$$\tilde{\sigma} = \sigma B^{-1} = (\bar{\sigma}A)(\bar{B}A)^{-1} = \bar{\sigma}\bar{B}^{-1}$$

となる．これから次が出る：**1-形式 $\tilde{\sigma}^1, \cdots, \tilde{\sigma}^n$ は $\mathsf{F}$ 全体の上で定義され，定義に用いた特定の局所座標系および動標構には完全に無関係である．**

これは第一の重要事実である．われわれは一つの $n$ 次元多様体 $\mathsf{M}$ から出発し，その上に一つの新しい多様体 $\mathsf{F}$ を構成した．この新しい多様体上に，われわれは自動的に無料で $n$ 個の(1 次独立な) 1-形式 $\tilde{\sigma}^1, \cdots, \tilde{\sigma}^n$ を得るのである．

さて $\mathsf{M}$ 上に一つのアフィン接続が与えられているとしよう．かくして，一定のアフィン標構 $\mathsf{e}$ をもった近傍 $\mathsf{U}$ には，1-形式を成分とする行列 $\Omega = \|\omega_i{}^j\|$ が与えられている．$\bar{\mathsf{U}}$ 上の標構 $\bar{\mathsf{e}}$ に対応する行列 $\bar{\Omega}$ は，($\mathsf{U}$ と $\bar{\mathsf{U}}$ との交わりの上で)或る変換則によって $\Omega$ と関連している．この変換則の意味する所は，正に，

$$\tilde{\Omega} = \|\tilde{\omega}_i{}^j\| = B\Omega B^{-1} + (dB)B^{-1}$$

で定義された $n^2$ 個の 1-形式 $\tilde{\omega}_i{}^j$ 達が，見掛け上は $\mathsf{U}$ 上にある $\mathsf{F}$ の一部分でのみ定義されているようだが，**実は $\mathsf{F}$ の全体で定義されていて，$\mathsf{e}$ とその $\mathsf{U}$ には完全に無関係である**——ということに他ならない．

この命題は計算によって確かめられる．上の記号に従って，証明すべきことは次の式である．

$$B\Omega B^{-1} + (dB)B^{-1} = \bar{B}\bar{\Omega}\bar{B}^{-1} + (d\bar{B})\bar{B}^{-1}.$$

詳細な実行は読者に委ねるが，この結果は次のような記号的計算からモティーフを得ることができることを指摘しておく：

$$\mathrm{f} = B\mathrm{e},$$

$$\mathrm{df} = (dB)\mathrm{e}+B(\mathrm{de}) = (dB+B\Omega)\mathrm{e}$$
$$= (dB+B\Omega)B^{-1}\mathrm{f},$$

同様に,

$$\mathrm{df} = (d\bar{B}+\bar{B}\bar{\Omega})\bar{B}^{-1}\mathrm{f}.$$

従って

$$(dB+B\Omega)B^{-1} = (d\bar{B}+\bar{B}\bar{\Omega})\bar{B}^{-1}.$$

F 上の 1-形式 $\tilde{\sigma}^1, \cdots, \tilde{\omega}_i{}^j$ から 2-形式(F 上の) $\tilde{\tau}^i, \tilde{\theta}_i{}^j$ が次のように作られる:

$$\tilde{\tau} = (\tilde{\tau}^1, \cdots, \tilde{\tau}^n) = d\tilde{\sigma}-\tilde{\sigma}\tilde{\Omega},$$
$$\tilde{\Theta} = \|\tilde{\theta}_i{}^j\| = d\tilde{\Omega}-\tilde{\Omega}^2.$$

これらをそれぞれ**一般振率形式** (general torsion form) および**一般曲率形式** (general curvature form) という.

## 8.6 問 題

**1.** $\Sigma$ を平均曲率 $H$ が一定の凸閉曲面とする. $\Sigma$ が球面であることを証明せよ.

**2.** $\Sigma$ は Monge の形 $z=f(x, y)$ に与えられた曲面で, $x, y$ のあらゆる値に対し定義されているとする. この曲面が下から凸とする. このことは

$$\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

が正の半定値であることを意味する. これを示せ.

**3.** (つづき)写像

$$(x, y) \to (x+p, y+q)$$

は距離を増加させ, 従って 1 対 1 であることを示せ.

**4.** 超曲面上の一点が**臍点** (umbilic) とは, その点での変換 $A$ の固有値(すなわち主曲率)がすべて等しいことをいう. 超曲面 M のあらゆる点が臍点ならば, M は超平面または球面の一部分になる. これを証明せよ.

**5.** Riemann 多様体 M 上にスカラー $K$ があって

$$\theta_{ij} = -K\sigma_i \wedge \sigma_j$$

を満たすとする．$K$ が定数なることを証明せよ．

**6.** M をアフィン接続の与えられた多様体とする．

$$\alpha = \sum \theta_i{}^i = \mathrm{trace}\, \Theta$$

で定義された 2-形式 $\alpha$ は，局所標構には無関係で，実は M 全体の上で定義されていることを示せ．また $d\alpha=0$ を示せ．実は M 上に 1-形式 $\lambda$ が存在して $\alpha=d\lambda$ となることさえもいえるのであるが，これを証明するのは難しい．

**7.** (つづき)次式を証明せよ．

$$d\Theta^r = \Omega\Theta^r - \Theta^r\Omega,$$

$$d[\mathrm{trace}\, \Theta^r] = 0.$$

**8.** M をアフィン接続をもつ多様体とする．$\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ を与えられたアフィン標構，$\Gamma$ と $T$ をそれぞれ対応する接続係数および捩率係数として，新しい接続を，その接続係数 $\Gamma^*$ を次のように定めて定義する：

$$\Gamma^*{}_i{}^j{}_k = \Gamma_i{}^j{}_k + \frac{1}{2} T^j{}_{ik}.$$

これが実際 M 全体上で定義された接続であることを示せ．またこの接続が**対称**(symmetric)すなわち捩率が 0 であることを示せ．‘対称性’ の意味を，局所座標系に対して研究せよ．

**9.** 点 $(x_1, \cdots, x_n)$ ($x_i$ は実数で mod 1 で考える)の全体のなす平坦な輪環体 $\mathsf{T}^n$ を考える．すなわち，

$$(x_1, \cdots, x_n) = (y_1, \cdots, y_n) \Longleftrightarrow x_i - y_i = \text{整数} \qquad (i=1, \cdots, n).$$

このとき $\mathsf{T}^n$ 上に平坦な計量が 1-形式の正規直交系

$$\sigma_1 = dx_1, \quad \cdots, \quad \sigma_n = dx_n$$

で与えられる(昔の記号では，$[ds]^2 = [dx_1]^2 + \cdots + [dx_n]^2$)．あらゆる次数のあらゆる調和微分形式を見出せ．

# 第IX章　群論への応用

## 9.1　Lie　群

**Lie 群**(Lie group)とは，群構造

$$(x, y) \to xy$$

をもった滑らかな多様体Gをいう．この群演算は

$$G \times G \to G$$

なる写像と見做せるが，これが滑らかと仮定する．またG→Gなる写像$x \to x^{-1}$が滑らかと仮定する．

Gの各元$x$に対し，**左平行移動**(left translation)と称するGの変換$L_x$が生ずる：

$$L_x(y) = xy.$$

G上の$p$-形式$\omega$が，Gのあらゆる元$x$に対し

$$L_x{}^*\omega = \omega$$

を満たすとき，$\omega$を**左不変**(left invariant)という．

$e$をGの単位元とする．左平行移動$L_x{}^{-1} = L_{x^{-1}}$は$x$を$e$に移すから，もし$\omega$が左不変ならば，$x$における$\omega = L_{x^{-1}}{}^*\omega$は，$e$における値$\omega_0$で完全に定まる．$\omega_0$を任意に与えられた$e$における$p$-形式とすれば，

$$\omega_x = L_{x^{-1}}{}^*\omega_0$$

により，左不変微分形式$\omega$が定義される．これらの注意は左不変微分形式の存在を決定するのに役立つ．1-形式から始めよう．Gの次元を$n$とする．$e$における1-形式のなす空間は，$n$次元ベクトル空間だから，G上にはちょうど$n$個の1次独立な左不変1-形式がある．その1組を

$$\sigma^1, \cdots, \sigma^n$$

とする．すると他のどんな左不変1-形式も，これらの定数係数の1次結合である．

さらに一般に，$\omega$ を G 上の任意の左不変 $p$-形式とすれば

$$\omega = \sum c_H \sigma^H$$

と書ける．ここで $c_H$ 達は定数で，$\sigma^H = \sigma^{h_1} \cdots \sigma^{h_p}$ である．任意の $p$-形式 $\omega$ はこの形に展開される．ただし係数 $c_H$ は一般には G 上のスカラーである．$\omega$ を左不変と仮定すれば，これらのスカラーがどれも左不変になってしまう．これは各 $c_H$ が G の各点で同じ値をとることを意味するから，従って $c_H$ は定数となる．

次に，$\omega$ が左不変ならば，

$$L_x^*(d\omega) = d(L_x^*\omega) = d\omega$$

により，$d\omega$ も左不変である．従って次式を満たすような**構造定数**(constants of structure) $c^i{}_{jk}$ 達が存在する：

$$d\sigma^i = \frac{1}{2}\sum c^i{}_{jk}\sigma^j\sigma^k, \qquad c^i{}_{jk} + c^i{}_{kj} = 0.$$

これを $d(d\sigma^i) = 0$ なる関係式に代入すると，結局次式を得る：

$$\sum (c^i{}_{jk}c^j{}_{rs} + c^i{}_{jr}c^j{}_{sk} + c^i{}_{js}c^j{}_{kr}) = 0.$$

特に重要なのは，$n$-形式

$$\sigma^1 \cdots \sigma^n$$

である．これは G 上の左不変体積要素を定義する．これから明らかに G は向きづけ可能である．

G の元 $z$ に対応して，G から G への写像 $R_z$:

$$y \to R_z y = yz$$

が生ずる．$R_z$ を**右平行移動**(right translation)という．結合律

$$x(yz) = (xy)z$$

から

$$L_x \circ R_z = R_z \circ L_x$$

が出る．従って

$$R_z^* \circ L_x^* = L_x^* \circ R_z^*$$

となる．$\omega$ を左不変 $p$-形式とすれば，各 $x, z$ に対して

$$L_x{}^*(R_z{}^*\omega) = R_z{}^*(L_x{}^*\omega) = R_z{}^*\omega.$$

よって，$R_z{}^*\omega$ も左不変 $p$-形式になる．

## 9.2　Lie 群の例

**例 1**　$n=1$. あらゆる 1 次元の Lie 群の局所的構造を決定しよう．$t$ を G 上のパラメーターとし，$t=0$ が単位元 $e$ となるように選んでおく．$\sigma$ を自明でない(すなわち 0 でない)左不変 1-形式とする．局所的には

$$\sigma = f(t)dt \qquad (\text{決して } 0 \text{ にならぬ})$$

となる．$\sigma$ を積分して G の新しいパラメーターを得る：

$$\int_0^t f(t)dt.$$

かくして，初めから $e$ の近傍に 1 変数 $t$ でパラメーターをいれて，

$$\sigma = dt$$

が左不変 1-形式であるとしてもよい．

次に群の積を解析的に表わす．座標 $s$ の元と座標 $t$ の元の積の座標 $u$ が

$$u = p(s, t)$$

で与えられるとする．$xe=x$ および $ey=y$ により

$$p(s, 0) = s, \qquad p(0, t) = t$$

である．座標を使っていえば

$$L_s\colon\ t \to u = p(s, t)$$

である．$\sigma$ の左不変性 $L_s{}^*\sigma=\sigma$ は，

$$dt = \frac{\partial p}{\partial t}dt$$

を意味する．よって

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 1, \qquad p(s, t) = t+\phi(s).$$

$t=0$ とおいて，

$$s = p(s, 0) = \phi(s).$$

従って

$$p(s,t)=s+t.$$

従って群演算に対応するのは座標の和に他ならないことがわかる．系として，G は abel 群(可換群)になる．

**例 2** G を構造定数 $c^i{}_{jk}$ がすべて 0 であるような Lie 群とする．かくして

$$d\sigma^1=\cdots=d\sigma^n=0.$$

$e$ の小近傍においては

$$\sigma^i=du^i$$

となる．ただし $(0,0,\cdots,0)\leftrightarrow e$ となるようにとる．それぞれ座標 u, v をもつ 2 点の積の座標 w が

$$w^i=p^i(\mathsf{u},\mathsf{v}),$$

$$p^i(\mathsf{u},0)=u^i,\qquad p^i(0,\mathsf{v})=v^i$$

で与えられるとする．左平行移動

$$\mathsf{v}\to\mathsf{w},\qquad w^i=p^i(\mathsf{u},\mathsf{v})$$

の下での $\sigma^i$ の左不変性は，解析的には次式で表わされる：

$$dv^i=\sum\frac{\partial p^i}{\partial v^j}(\mathsf{u},\mathsf{v})dv^j.$$

従って

$$\left\|\frac{\partial p^i}{\partial v^j}\right\|=I,$$

$$\frac{\partial p^i}{\partial v^j}(\mathsf{u},\mathsf{v})=\delta^i{}_j,$$

$$p^i(\mathsf{u},\mathsf{v})=v^i+\phi^i(\mathsf{u})$$

となる．v=0 とおけば

$$u^i=\phi^i(\mathsf{u})$$

を得る．従って

$$p^i(\mathsf{u},\mathsf{v})=u^i+v^i$$

である．座標 u をもつ点を $P(\mathsf{u})$ と書けば，上式は

$$P(\mathsf{u})\cdot P(\mathsf{v})=P(\mathsf{u}+\mathsf{v})$$

を示している．よって，局所的には群は $\mathsf{E}^n$ 中で 0 の近傍のように見えるわけ

である．

**系** G は abel 群である．

## 9.3 行列群

さて，$m$ 行 $m$ 列の正則行列全体のなす群を，GL$(m)$ と書く．（この記号は慣用されている名前(**一般線型群**, general linear group)から来ている.）いま GL$(m)$ の滑らかな部分群 G を考える．

$u^1, \cdots, u^n$ を，G 上の，単位行列 $I$ のある近傍における座標系とする．$X= X(u^1, \cdots, u^n)$ をこの近傍中の一般の点とする．1-形式のなす行列 $dX$ は確かに $n$ 個の 1 次独立な 1-形式を含んでいる．何故なら，$n$ 次元の群 G が GL$(m)$ 中に滑らかに埋め込まれているからである．従って 1-形式を成分とする行列

$$\Omega = X^{-1}dX$$

は $n$ 個の 1 次独立な 1-形式を含む．ところが $\Omega$ **の各成分は左不変である**．何故ならば，$A$ を G の任意の固定元として，$A$ による左平行移動:

$$X \to AX$$

を考えれば，

$$(AX)^{-1}d(AX) = (X^{-1}A^{-1})(A\,dX) = X^{-1}dX$$

となるからである．このことを使って，多くの重要な群において具体的計算が可能になる．

次に $\Omega$ の重要な幾何学的解釈について注意する．G の各元 $X$ を行ベクトル $\mathrm{v} = (v_1, \cdots, v_n)$ のなす空間 $\mathrm{E}^n$ の 1 次変換と見做す．かくして

$$\mathrm{v} \to \mathrm{w} = \mathrm{v}X.$$

次のことを問題にしよう: v を固定して $X$ を G 上に動かすとき，$d\mathrm{w}$ が群作用の下で w に対して大きくなる程度はどの位か？ すると

$$d\mathrm{w} = \mathrm{v}\,dX = (\mathrm{w}X^{-1})dX,$$

$$d\mathrm{w} = \mathrm{w}\Omega.$$

これは，$\Omega$ が**群の無限小要素**(infinitesimal element)として解釈できることを意味している(4.2節参照)．

最後に注意を一つ：構造定数は次のような考察によって具体的に求められることが多い：

$$\begin{aligned} \Omega &= X^{-1}dX, \\ dX &= X\Omega, \\ 0 &= d(dX) = (dX)\Omega + X\,d\Omega \\ &= (X\Omega)\Omega + X\,d\Omega. \end{aligned}$$

故に,

$$d\Omega + \Omega^2 = 0.$$

## 9.4 行列群の例

**例 3**

$$\mathsf{G} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x > 0 \right\}.$$

これは直線上の固有のアフィン変換のなす群である．G と変換群の間の同型対応

$$t \to xt + y$$

は容易にわかる．ここでは

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X^{-1} = \frac{1}{x}\begin{pmatrix} 1 & -y \\ 0 & x \end{pmatrix},$$

$$\Omega = \frac{1}{x}\begin{pmatrix} 1 & -y \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx & dy \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{x}\begin{pmatrix} dx & dy \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって $\sigma^1 = dx/x$ と $\sigma^2 = dy/x$ が左不変である．左不変体積要素は

$$\sigma^1 \wedge \sigma^2 = \frac{dxdy}{x^2}$$

である．$d\sigma^1 = 0$, $d\sigma^2 = -dxdy/x^2 = -\sigma^1 \wedge \sigma^2$ であるから，唯一の意味ある構造定数は

$$c_{12}^2 = -c_{21}^2 = -1$$

である．右不変微分形式を求めるには

$$(dX)X^{-1} = \frac{1}{x}\begin{pmatrix} dx & dy \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \frac{1}{x}\begin{pmatrix} dx & -y\,dx + x\,dy \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の中から探せばよい．よって基底として

$$\alpha^1=\sigma^1=\frac{dx}{x},\qquad \alpha^2=\frac{-y\,dx+x\,dy}{x}$$

が得られる．右不変な体積要素は

$$\alpha^1\wedge\alpha^2=\frac{dxdy}{x}$$

であって，左不変のものとは大分異なっている．また

$$d\alpha^2=\frac{dxdy}{x}=\alpha^1\wedge\alpha^2.$$

いま

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\0&1\end{pmatrix}$$

として，右平行移動 $R_A$ の $\sigma^2$ に対する効果を計算しよう：

$$R_A(X)=XA=\begin{pmatrix}x&y\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax&bx+y\\0&1\end{pmatrix},$$

$$R_A{}^*(\sigma^2)=\frac{d(bx+y)}{ax}=\frac{b}{a}\frac{dx}{x}+\frac{1}{a}\frac{dy}{x}=\frac{b}{a}\sigma^1+\frac{1}{a}\sigma^2.$$

**例 4　階段変換群**(step transformation group)は次の形の行列全体よりなる：

$$X=\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}\qquad(x>0),$$

$$\Omega=X^{-1}dX=\frac{1}{x^2}\begin{pmatrix}x&-y\\0&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx&dy\\0&dx\end{pmatrix}=\frac{1}{x^2}\begin{pmatrix}x\,dx&x\,dy-y\,dx\\0&x\,dx\end{pmatrix}.$$

よって，$\sigma^1,\sigma^2$ として次のものがとれる．

$$\sigma^1=\frac{dx}{x}=d(\ln x),\qquad \sigma^2=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=d\left(\frac{y}{x}\right).$$

新座標への移行

$$u=\ln x,\qquad v=\frac{y}{x}$$

が例2のやり方からわかる．かくして群は abel 群で

$$X=\begin{pmatrix}e^u&ve^u\\0&e^u\end{pmatrix}=e^u\begin{pmatrix}1&v\\0&1\end{pmatrix}.$$

もし別の元

$$A = e^a\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

があれば

$$AX = e^{a+u}\begin{pmatrix}1 & b+v\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

となる．不変体積要素は $dxdy/x^2 = dudv$ である．

**例 5** G=GL($n$)：$n$ 次正則行列全体のなす**一般線型群**．一般元は $X=\|x_i{}^j\|$，$x_i{}^j$ は独立変数(不等式 $\Delta=\det(x_i{}^j)\neq 0$ に従う)である．$X$ の随伴行列($X$ の元 $x_i{}^j$ の余因子(cofactor)を成分とする行列)を $Y$ として(これを $Y=\operatorname{cof} X$ と書く)，

$$X^{-1} = \frac{1}{\Delta}Y, \qquad Y = \operatorname{cof} X,$$

$$\Omega = X^{-1}dX = \|\sigma_i{}^k\|$$

とおくと，

$$\sigma_i{}^k = \frac{1}{\Delta}\sum y_i{}^j dx_j{}^k.$$

$n^2$ 個の左不変 1-形式 $\sigma_i{}^k$ 達は必然的に 1 次独立となる．体積要素

$$\tau = \prod_{i,k}\sigma_i{}^k$$

を次の 2 段階にわけて計算する．

$$\tau = \nu^1\wedge\cdots\wedge\nu^n,$$

$$\nu^k = \sigma_1{}^k\wedge\cdots\wedge\sigma_n{}^k = \frac{1}{\Delta^n}(\sum y_1{}^j dx_j{}^k)\wedge\cdots\wedge(\sum y_n{}^j dx_j{}^k)$$

$$= \frac{1}{\Delta^n}\det(y_i{}^j)\,dx_1{}^k\cdots dx_n{}^k.$$

$XY=\Delta I$ から $\det(X)\det(Y)=\Delta^n$ を得るから

$$\det(Y) = \Delta^{n-1},$$

$$\nu^k = \frac{1}{\Delta}dx_1{}^k\cdots dx_n{}^k,$$

$$\tau = \frac{1}{\Delta^n}\prod_{k=1}^{n}(dx_1{}^k\cdots dx_n{}^k).$$

これから明らかに，右不変体積要素も $\tau$ となる．この群 GL($n$) は abel 群には程遠いから，この性質はこの群の著しい特色である．

**例 6**　G=SL($n$)：**特殊線型群** (special linear group) 或いは **ユニモジュラー群** (unimodular group)．これは行列式が 1 なる行列全体のなす群である．注意すべき特色は

$$\mathrm{trace}(\Omega) = 0$$

である．これは任意個数の変数の行列函数 $X$ に対する一般的公式から出る．$\Delta=\det(X)$ とおく．その公式というのは

$$\frac{d\Delta}{\Delta} = \mathrm{trace}(X^{-1}dX)$$

である．これの証明は次の通り．$X$ の第 $j$ 列を

$$\mathrm{c}^j = \begin{bmatrix} x_1{}^j \\ x_2{}^j \\ \vdots \\ x_n{}^j \end{bmatrix}$$

と書き，

$$\Delta = \det(\mathrm{c}^1, \cdots, \mathrm{c}^n)$$

を列の函数として考える．すると

$$\begin{aligned} d\Delta &= \sum_{j=1}^{n} \Delta(\mathrm{c}^1, \cdots, \mathrm{c}^{j-1}, d\mathrm{c}^j, \mathrm{c}^{j+1}, \cdots, \mathrm{c}^n) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} y_j{}^i dx_i{}^j = \mathrm{trace}[(\mathrm{cof}\, X)\, dX] \\ &= \mathrm{trace}[\Delta X^{-1}dX] = \Delta\, \mathrm{trace}(X^{-1}dX). \end{aligned}$$

G=SL($n$) に対しては，$\Delta=1$, $d\Delta=0$ となるから，$\mathrm{trace}(\Omega)=0$ を得る．$n=2$ に対しては

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}, \qquad \Delta = xv-yu = 1.$$

$$\begin{aligned} \Omega = X^{-1}dX &= \begin{pmatrix} v & -y \\ -u & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx & dy \\ du & dv \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v\,dx-y\,du & v\,dy-y\,dv \\ -u\,dx+x\,du & -u\,dy+x\,dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^1 & \sigma^2 \\ \sigma^3 & \sigma^4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\Delta=1$ を微分して次式を得る.

$$x\,dv+v\,dx-y\,du-u\,dy=0, \qquad \sigma^1+\sigma^4=0.$$

左不変体積要素として次がとれる:

$$\begin{aligned}\tau=\sigma^1\wedge\sigma^3\wedge\sigma^2&=dxdu(v\,dy-y\,dv)\\&=v\,dxdudy-y\,dxdudv.\end{aligned}$$

**例 7** $G=O^+(n)$: **固有直交群** (proper orthogonal group). また**特殊直交群** (special orthogonal group) といい, $SO(n)$ とも書く. これは次のような行列 $X$ 全体のなす群である:

$$^tX=X^{-1}, \qquad \det(X)=+1.$$

ここで上つき添字 $t$ は**転置行列** (transpose) を意味する. $\Omega$ に関する本質的性質は, $\Omega$ が歪対称行列なることである:

$$\Omega+{}^t\Omega=0.$$

群 G の次元は $n(n-1)/2$ だから, $\Omega$ の主対角線の上にある元が左不変 1-形式達の基底をなし, その積が左不変体積要素なることがわかる. $\Omega$ の歪対称性の証明は次の通り:

$$X\,{}^tX=I, \qquad (dX)\,{}^tX+X\,{}^t(dX)=0,$$

$$X^{-1}dX+{}^t(dX)\,{}^tX^{-1}=0,$$

$$X^{-1}dX+{}^t(X^{-1}dX)=0, \qquad \Omega+{}^t\Omega=0.$$

$n=2$ のときは,

$$X=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$

$$\Omega=X^{-1}dX=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin\theta & \cos\theta\\ -\cos\theta & -\sin\theta\end{pmatrix}d\theta=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}d\theta.$$

$n>2$ のときは, 計算は複雑になり, G の具体的なパラメーター表示に応じて色々に変る. $n$ の偶数, 奇数によってかなり異なる.

## 9.5 両側不変微分形式

G を Lie 群, $e$ をその単位元とする. G は多様体だから, $e$ の座標近傍 U とその上の局所座標系があって, $e$ の座標が $(0, 0, \cdots, 0)$ となる. $x$ と $y$ とが $e$

に非常に近く，かつ U 中にあるとする．このとき $z=xy$ も U 中にある．これら 3 点の座標をそれぞれ $(x^1, \cdots, x^n)$, $(y^1, \cdots, y^n)$, $(z^1, \cdots, z^n)$ とすれば

$$z^i = z^i(x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n)$$

と書ける．$xe=x$, $ey=y$ であるから

$$z^i(x^1, \cdots, x^n, 0, \cdots, 0) = x^i,$$
$$z^i(0, \cdots, 0, y^1, \cdots, y^n) = y^i$$

を得る．これらの事実を使えば

$$z^i = x^i + y^i + (x^j, y^k \text{ に関する高次の項})$$

となる．特に $y=x^{-1}$ なら $z=e$ で，

$$0 = x^i + y^i + (\text{高次の項})$$

となる．これらの簡単な注意を次のように適用する．$\phi$ で写像 $\phi(x)=x^{-1}$ を示す：

$$\phi:\ \mathsf{G} \to \mathsf{G}.$$

いま

$$y = \phi(x),$$
$$y^i = y^i(x^1, \cdots, x^n)$$

と書けば，すぐ上に論じた式により

$$\left.\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|_0 = -\delta^i{}_j$$

となる．これは次を意味する：

$$y^i = -x^i + (x^j \text{ に関する高次の項}).$$

これを別の仕方でも表わせる：

$$\phi:\ (x^1, \cdots, x^n) \to -(x^1, \cdots, x^n) + (\text{高次の項}).$$

$\phi(e)=e^{-1}=e$ であるから，誘導された写像 $\phi^*$ は，$e$ における各微分形式を，$e$ における別の微分形式に移す．明らかに

$$\phi^*(dx^i) = -dx^i \qquad (e \text{ において}),$$
$$\phi^*(dx^1 \cdots dx^p) = (-1)^p(dx^1 \cdots dx^p) \qquad (e \text{ において})$$

を得る．かくして，$\omega_e$ **を** $e$ **における任意の** $p$**-形式とすれば，次式が成り立つ：**

$$\psi^*(\omega_e) = (-1)^p \omega_e.$$

G の各元 $y$ について，右平行移動 $R_y$ が

$$R_y(x) = xy$$

で定義されたのであったが，微分形式 $\omega$ が G の各元 $y$ に対して

$$R_y{}^*\omega = \omega$$

を満たすとき，$\omega$ を**右不変**(right invariant)という．写像 $\psi$ の第一の応用は次の命題である．

**微分形式 $\omega$ は，$\psi^*\omega$ が右不変のとき，かつそのときに限り左不変である．**

何故ならば，

$$\begin{aligned}\psi(R_y(x)) &= \psi(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}\\ &= L_{y^{-1}}(x^{-1}) = L_{y^{-1}}(\psi(x))\end{aligned}$$

だから

$$\psi \circ R_y = L_{y^{-1}} \circ \psi,$$

$$\therefore \quad R_y{}^* \circ \psi^* = \psi^* \circ L_{y^{-1}}{}^*.$$

もし $\omega$ が左不変なら，G の各元 $y$ に対して

$$R_y{}^*(\psi^*\omega) = \psi^*(L_{y^{-1}}{}^*(\omega)) = \psi^*\omega.$$

よって $\psi^*\omega$ は右不変である．同様に，もし $\omega$ が右不変ならば，$\psi^*\omega$ は左不変になる．$(x^{-1})^{-1}=x$ であるから $\psi\circ\psi=\iota$ (恒等写像)．従って $\psi^*(\psi^*\omega)=\omega$．従って，$\psi^*\omega$ が右不変なら，$\omega$ は左不変である．

次に，左不変 1-形式の代りに右不変 1-形式を使っても，新しい構造定数は付加されないことを見よう．何故ならば，$\sigma^1, \cdots, \sigma^n$ を左不変 1-形式達の基底とすれば，対応する構造定数達は次の等式から読み取れる：

$$d\sigma^i = \frac{1}{2}\sum c^i{}_{jk}\sigma^j \wedge \sigma^k.$$

さて 1-形式 $\tau^1=\psi^*\sigma^1$, $\cdots$, $\tau^n=\psi^*\sigma^n$ 達は右不変 1-形式達の基底をなす．しかし $\psi^*$ を上の等式に適用すれば，$c$ 達が定数だから

$$\psi^*(d\sigma^i) = \frac{1}{2}\sum c^i{}_{jk}\psi^*(\sigma^j \wedge \sigma^k),$$

$$d(\psi^*\sigma^i) = \frac{1}{2}\sum c^i{}_{jk}(\psi^*\sigma^j) \wedge (\psi^*\sigma^k),$$

$$\therefore \quad d\tau^i = \frac{1}{2}\sum c^i{}_{jk}\tau^j \wedge \tau^k$$

となる．

さて次に**両側不変微分形式**(bi-invariant forms)の研究に移る．左不変かつ右不変な微分形式を**両側不変**という．一つの重要な結果を導こう：

**$\omega$ が両側不変 $p$-形式ならば**

$$d\omega = 0.$$

何故なら，$\omega$ の右不変性より $\psi^*\omega$ は左不変である．一方，前の頁で計算したように，点 $e$ においては

$$\psi^*(\omega_e) = (-1)^p\omega_e$$

が成り立つ．ところが $\omega$ も $\psi^*\omega$ も共に左不変だから，$e$ で成り立つことは至る所で成り立つ：

$$\psi^*(\omega) = (-1)^p\omega.$$

一方，$d\omega$ は $(p+1)$-形式で，これも両側不変であるから，同じことがいえて，

$$\psi^*(d\omega) = (-1)^{p+1}d\omega$$

となる．しかし

$$\psi^*(d\omega) = d(\psi^*\omega) = d[(-1)^p\omega] = (-1)^p d\omega$$

であるから，上の等式から $d\omega=0$ を得る．

この結果をGが可換群の場合に適用する．このときは左右の平行移動は同一だから，どの左不変微分形式も両側不変になる．特に，$\sigma^1, \cdots, \sigma^n$ が左不変 1-形式の基底ならば，各 $\sigma^i$ は閉：$d\sigma^i=0$．従ってすべての構造定数が 0 となる．9.2節の例2において，構造定数が0であるいかなる群も，局所的には Euclid 空間(ベクトル加群)の構造をもつことを示した．(ついでながら，そのような群は可換群にもなるのであった．)

さて，両側不変微分形式に関するもう一つの結果がある．それはすこし趣きを異にしている．

**Gを $n$ 次元の閉じた(コンパクトな)連結 Lie 群とし，$\omega$ をG上の左不変 $n$-**

**形式とすれば，$\omega$ は両側不変である．**

G の各元 $x$ に対し，$R_x{}^*\omega$ も左不変である．$\omega \neq 0$ と仮定してよいから，左不変 $n$-形式の空間が 1 次元であることにより，$R_x{}^*\omega = f(x)\omega$, $f(x)$ は実数，と書ける．$R_x{}^* \circ R_y{}^* = R_{yx}{}^*$ により，$f(xy)=f(x)f(y)$ (実数は交換可能！)．$1=f(e)=f(x)f(x^{-1})$ であるから，$f(x)$ は決して 0 にならない．かくして $f$ は G を実数体 R から 0 を除いた所に写す．G がコンパクトだから，$f$ による G の像は R の有界な区間である．しかも 0 からは離れている．すなわち 0 から正の距離をもっている．$f$ が乗法を保つから，像 $f(\mathrm{G})$ は正の実数のなす乗法群の部分群である．(正になる理由は，多様体の像 $f(\mathrm{G})$ が区間で，しかも $1=f(e)$ を含むからである.) もし $f(\mathrm{G})$ が実数 $a \neq 1$ を含めば，$a^n \to \infty$ となるか $a^n \to 0$ となるかであるが，$a^n$ はつねに乗法について閉じた区間 $f(\mathrm{G})$ 中に留まらねばならないから，どちらも不可能である．よって $f(\mathrm{G})$ は 1 のみからなり，G の各元 $x$ に対して $f(x)=1$ となる．すなわち $R_x{}^*\omega=\omega$ となり，$\omega$ は求める通り両側不変となる．

## 9.6 問　　題

**1.** 0 でない複素数のなす乗法群を C* とする．不変体積(面積)要素を見出せ．

**2.** 次の形の行列

$$\begin{pmatrix} z & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (z, w \text{ は複素数で } z \neq 0)$$

の全体のなす 4 次元の群の構造定数を定めよ．また左不変体積要素が次のようになることを示せ．

$$\frac{-(dz \wedge d\bar{z} \wedge dw \wedge d\bar{w})}{|z|^4}.$$

ただし $dz=dx+i\,dy$ ならば $d\bar{z}=dx-i\,dy$ である．

**3.** 9.3 節の例に類似な他の複素行列の群を論ぜよ．例えばユニタリ行列と歪エルミット行列の間の関係を論ぜよ．

**4.** 9.5 節の座標の考察を拡張して次を示せ：

$$z^i = x^i + y^i + \sum a^i{}_{jk} x^j y^k + (3\text{ 次以上の項}).$$

また，

$$a^i{}_{jk} - a^i{}_{kj}$$

達が，適当な左不変 1-形式の基底に関して構造定数となることを示せ．$xy$ と $yx$ とを比較せよ．

**5.** どの左不変 $p$-形式も左不変 1-形式を用いて表わせることは既知であるが，対応する命題は両側不変微分形式については成り立つであろうか？

**6.** $c^i{}_{jk}$ を群の構造定数とし

$$g_{jl} = \sum_{i,k} c^i{}_{jk} c^k{}_{il}$$

とおく．$g_{jl}$ が対称テンソルであることを示せ．また

$$c_{ijk} = \sum_l c^l{}_{ij} g_{lk}$$

とおく．$c_{ijk}$ が歪対称テンソルなることを示せ．

**7.** z を G 上の $p$-輪体とする．どの閉じた $p$-形式 $\omega$ と G のどの元 $g$ に対しても

$$\int_z \omega = \int_z L_g{}^* \omega$$

となることを証明せよ．

(G は連結，すなわちワンピースからなる，と仮定せねばならない．)

# 第 X 章　物理学への応用

## 10.1　状態空間と位相空間

われわれのもくろみは有限の自由度をもったホロノミックな力学系の考察である．ただし衝突現象には触れない．本節では“そのような系の幾何学”を定式化する．

**位置空間**(position space)は一つの $n$ 次元多様体 M に他ならない．

次に M にとりつけられた**位相空間**(phase space)を定義する．これは M のあらゆる点におけるあらゆる共変ベクトルのなす空間である．詳しくいえば，次の通り：局所座標

$$q^1, \cdots, q^n$$

をもった M の座標近傍 U を考える．U の各点 $P$ においては，共変ベクトルとは $P$ における 1-形式に他ならない．従ってその成分(局所座標系 $(q^i)$ に関する)

$$p_1, \cdots, p_n \quad (p_i \text{ は実数})$$

で与えられる．(1-形式自身は $\sum p_i dq^i$ である.)

もし

$$\bar{q}^1, \cdots, \bar{q}^n$$

が $P$ で有効なもう一つの局所座標ならば，同じ共変ベクトルの局所座標系 $(\bar{q}^i)$ 達に関する成分は

$$\bar{p}_i = \sum p_j \frac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^i}$$

となる．このような共変ベクトルを M のあらゆる点で考えた全体が $2n$ 次元の位相空間 P をなす．局所座標 $q^1, \cdots, q^n$ をもった M 上の各座標近傍 U に対して，P の座標近傍 $U \times E^n$ が対応する．その局所座標は

$$q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n$$

である．従って

$$\alpha = \sum p_i dq^i$$

なる1-形式は，P 上の1-形式であって，これは局所座標のとり方には全く無関係である．そして

$$d\alpha = \sum dp_i dq^i$$

が成り立つ．従って**位相密度**(phase density) (2.3節参照)

$$dp_1 \cdots dp_n dq^1 \cdots dq^n$$

は P 上の $2n$-形式であって，決して0にならず，

$$\pm (d\alpha)^n = (n!)(dp_1 \cdots dp_n dq^1 \cdots dq^n)$$

で定義される．そしてこれは P 上の体積要素の役をする．

局所座標近傍 U と $\bar{\text{U}}$ とが重なり合う所で成り立つ座標変換

$$\begin{cases} \bar{q}^i = \bar{q}^i(q^1, \cdots, q^n), \\ \bar{p}_i = \sum p_j \dfrac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^i} \end{cases} \qquad (i=1, \cdots, n)$$

から導かれる若干の有用な関係式を述べよう．

まず関係

$$\sum \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^j} \frac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^k} = \delta^i{}_k$$

を $q^l$ について微分して

$$\sum \frac{\partial^2 \bar{q}^i}{\partial q^j \partial q^l} \frac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^k} + \sum \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^j} \frac{\partial^2 q^j}{\partial \bar{q}^k \partial \bar{q}^r} \frac{\partial \bar{q}^r}{\partial q^l} = 0.$$

これに $\partial q^s/\partial \bar{q}^i$ を掛けて和をとれば

$$\sum \frac{\partial q^s}{\partial \bar{q}^i} \frac{\partial^2 \bar{q}^i}{\partial q^j \partial q^l} \frac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^k} + \frac{\partial^2 q^s}{\partial \bar{q}^k \partial \bar{q}^r} \frac{\partial \bar{q}^r}{\partial q^l} = 0.$$

ここで次の添数の置換

$$\begin{pmatrix} s & r & k & l & i & j \\ j & r & i & k & l & s \end{pmatrix}$$

を行なえば，上式は次のように書かれる．

$$\sum \frac{\partial^2 q^j}{\partial \bar{q}^i \partial \bar{q}^r} \frac{\partial \bar{q}^r}{\partial q^k} = -\sum \frac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^l} \frac{\partial^2 \bar{q}^l}{\partial q^s \partial q^k} \frac{\partial q^s}{\partial \bar{q}^i}.$$

次に $\bar{p}_i$ の式を $q^k$ について微分して上式に代入すれば，

$$\frac{\partial \bar{p}_i}{\partial q^k} = \sum p_j \frac{\partial^2 q^j}{\partial \bar{q}^i \partial \bar{q}^r} \frac{\partial \bar{q}^r}{\partial q^k}$$

$$= -\sum p_j \frac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^l} \frac{\partial^2 \bar{q}^l}{\partial q^s \partial q^k} \frac{\partial q^s}{\partial \bar{q}^i}$$

$$= -\sum \bar{p}_l \frac{\partial^2 \bar{q}^l}{\partial q^s \partial q^k} \frac{\partial q^s}{\partial \bar{q}^i}.$$

ところが

$$p_k = \sum \bar{p}_l \frac{\partial \bar{q}^l}{\partial q^k}$$

であるから,

$$\frac{\partial p_k}{\partial \bar{q}^i} = \sum \bar{p}_l \frac{\partial^2 \bar{q}^l}{\partial q^k \partial q^s} \frac{\partial q^s}{\partial \bar{q}^i}.$$

かくして重要な対称関係が導かれた:

$$\frac{\partial \bar{p}_i}{\partial q^k} + \frac{\partial p_k}{\partial \bar{q}^i} = 0.$$

次に

$$\bar{p}_i = \sum p_j \frac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^i}$$

から次式は明らかである.

$$\frac{\partial \bar{p}_i}{\partial p_j} = \frac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^i}.$$

以上をまとめて次の公式が得られた:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{p}_i}{\partial q^k} = -\dfrac{\partial p_k}{\partial \bar{q}^i}, \\[2ex] \dfrac{\partial \bar{p}_i}{\partial p_j} = \dfrac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^i}. \end{cases}$$

最後に**状態空間**(state space)とは直積空間

$$\mathsf{S} = \mathsf{P} \times \mathsf{E}^1$$

として定義される $(2n+1)$ 次元の空間である. $\mathsf{E}^1$ を時間軸と考える. $\mathsf{S}$ 上の局所座標は次の通り:

$$q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n, t.$$

## 10.2 Hamilton 系

動力学系を Hamilton の形式で考えたい．まずこれが Lagrange の運動方程式(それは Euclid 座標では Newton の運動法則に帰着するのだが)から発展して来る様子を追跡しよう．われわれは保存的なホロノーム系だけを取り扱うことにする．

取扱いはまず初めは局所的である．$q^1, \cdots, q^n$ 空間の座標近傍を扱う．時間の各瞬間に対して，系の軌道を表わす点(位置)

$$(q^1(t), \cdots, q^n(t))$$

がある．例の如く $\dot{u}=du/dt$ とおく．**運動エネルギー**(kinetic energy)は函数

$$T(q^1, \cdots, q^n, \dot{q}^1, \cdots, \dot{q}^n)$$

であって，変数 $\dot{q}^i$ 達については正定値の 2 次形式であると仮定する．**ポテンシャル・エネルギー**(potential energy)は次の形の函数である:

$$V = V(q^1, \cdots, q^n, t).$$

そして，**Lagrange 函数** (Lagrangian function) 或いは**運動ポテンシャル**(kinetic potential)は次の函数である:

$$L = T - V.$$

すると Lagrange の運動の微分方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \qquad (i=1, \cdots, n)$$

となる．左辺第 1 項は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k}\ddot{q}^k$$

であるから，Lagrange 方程式は未知函数 $q^1, \cdots, q^n$ に対して連立の(方程式は $n$ 個) 2 階常微分方程式である．いまこれを転換して，$2n$ 個の未知函数に関する連立(方程式は $2n$ 個) 1 階常微分方程式に直そう．

**一般運動量の成分**(generalized momentum component)

$$p_1, \cdots, p_n$$

を，

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}$$

で導入する．2次形式 $T$ は正定値だから，変数変換

$$(q^1, \cdots, q^n, \dot{q}^1, \cdots, \dot{q}^n) \leftrightarrow (q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$$

はどちらの向きにも滑らかである．

Hamilton の形に達するには，伝統(因襲)に従ってかなり混乱をまねくような記号を用いる．この間の事情については3.5節にもっとよく述べてある．

函数 $T$ はつねに $2n$ 個の変数

$$q^1, \cdots, q^n, \dot{q}^1, \cdots, \dot{q}^n$$

の函数として考える．函数 $V$ は $q^i$(および $t$)しか含まないので，変数 $q^1, \cdots, q^n, \dot{q}^1, \cdots, \dot{q}^n, t$ の空間の函数とも考えられ，或いはまた変数 $q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n, t$ の空間の函数とも考えられる．

**Hamilton 函数**(Hamiltonian) $H$ を

$$H = H(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n, t) = \sum p_i \dot{q}^i - L$$

によって導入する．これは‘つねに’変数

$$q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n, t$$

の空間上の函数として考えることにする．

$T$ が $\dot{q}^i$ 達について2次の同次函数だから

$$2T = \sum \dot{q}^i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = \sum p_i \dot{q}^i.$$

よって，$H = 2T - L = 2T - (T - V)$，すなわち

$$H = T + V$$

である．従って $H$ は**総エネルギー**(total energy)を表わす．

$$2T = \sum p_i \dot{q}^i$$

から次式を得る：

$$2dT = \sum p_i d\dot{q}^i + \sum \dot{q}^i dp_i.$$

ところが

$$dT = \sum \left( \frac{\partial T}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i \right)$$

$$= \sum \frac{\partial T}{\partial q^i} dq^i + \sum p_i d\dot{q}^i$$

だから，引算して次式を得る：

$$dT = -\sum \frac{\partial T}{\partial q^i} dq^i + \sum \dot{q}^i dp_i.$$

この式から，

$$dH = dT + dV = \sum \left( -\frac{\partial T}{\partial q^i} + \frac{\partial V}{\partial q^i} \right) dq^i + \sum \dot{q}^i dp_i$$

$$= -\sum \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i + \sum \dot{q}^i dp_i.$$

かくして

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial q^i} = -\dfrac{\partial L}{\partial q^i} = -\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = -\dot{p}_i, \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}^i \end{cases}$$

となる．これが **Hamilton の形の**，**或いは正準形** (canonical form) **の運動方程式**

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i} \end{cases} \qquad (i=1, \cdots, n)$$

である．

次にどんな函数が Hamilton 函数となる資格があるかを調べる．

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j$$

と書く．ここで $\|a_{ij}(q)\|$ は，位置変数 $q$ の函数を成分とする，対称正定値の行列である．便利のため

$$\|b^{ij}(q)\| = \|a_{ij}(q)\|^{-1}$$

とおく．これも対称，正定値である．すると

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = \sum a_{ij} \dot{q}^j$$

である．これを逆に解いて

$$\dot{q}^i = \sum b^{ik} p_k$$

とすると，次式が得られる：

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{ij} b^{ik} b^{jl} p_k p_l$$

$$= \frac{1}{2} \sum b^{jl} p_j p_l.$$

この式から，

$$H(q, p, t) = \frac{1}{2} \sum b^{ij}(q) p_i p_j + V(q, t)$$

を得る．この式が，任意の Hamilton 函数の形を与えている．

さて，Hamilton 力学を大域的に定式化したい．正しいアプローチを発見するために，二つの Hamilton 系を比較する：

$$\begin{bmatrix} H = T - V \\ T = \dfrac{1}{2} \sum b^{ij}(q) p_i p_j \\ V = V(q, t) \\ \dot{q}^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \bar{H} = \bar{T} - \bar{V} \\ \bar{T} = \dfrac{1}{2} \sum \bar{b}^{ij}(\bar{q}) \bar{p}_i \bar{p}_j \\ \bar{V} = \bar{V}(\bar{q}, t) \\ \dot{\bar{q}}^i = \dfrac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_i} \\ \dot{\bar{p}}_i = -\dfrac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}^i} \end{bmatrix}$$

これらは互いに交わる領域 $\mathsf{U}, \bar{\mathsf{U}}$ 上で定義されていて，$\mathsf{U}$ と $\bar{\mathsf{U}}$ の共通部分 $\mathsf{U} \cap \bar{\mathsf{U}}$ 上で同値であると仮定する．座標変換

$$(q, p, t) \leftrightarrow (\bar{q}, \bar{p}, t)$$

は 10.1 節の如く与えられる：

$$\begin{cases} \bar{q}^i = \bar{q}^i(q^1, \cdots, q^n), \\ \bar{p}_i = \sum p_j \dfrac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^i}. \end{cases}$$

すると次式が得られる：

$$\sum \bar{b}^{ij} \bar{p}_j = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_i} = \dot{\bar{q}}^i = \sum \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^k} \dot{q}^k$$

$$= \sum \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^k} \frac{\partial H}{\partial p_k} = \sum \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^k} b^{kl} p_l.$$

従って

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \sum \bar{p}_i \bar{b}^{ij} \bar{p}_j = \frac{1}{2} \sum \bar{p}_i \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^k} b^{kl} p_l$$

$$= \frac{1}{2} \sum p_k b^{kl} p_l = T,$$

すなわち，$\mathsf{U}$ と $\bar{\mathsf{U}}$ の共通部分において

$$\bar{T} = T$$

となる．従ってまた

$$\bar{H} - H = \bar{V} - V$$

である．対称関係(前節の終りに導いた)

$$\frac{\partial \bar{p}_i}{\partial q^k} + \frac{\partial p_k}{\partial \bar{q}^i} = 0$$

および運動方程式の残りの部分を用いて次式が得られる：

$$-\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}^i} = \dot{\bar{p}}_i = \sum \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial q^j} \dot{q}^j + \sum \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial p_k} \dot{p}_k$$

$$= -\sum \frac{\partial p_j}{\partial \bar{q}^i} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \sum \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i} \frac{\partial H}{\partial q^k}$$

$$= -\frac{\partial H}{\partial \bar{q}^i},$$

すなわち

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}^i} = \frac{\partial H}{\partial \bar{q}^i}.$$

これより

$$\frac{\partial}{\partial \bar{q}^i} (\bar{V} - V) = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n).$$

従って $\bar{V} - V$ は $t$ だけの函数になる：

$$\bar{V} = V + f(t),$$

$$\therefore \quad \bar{H} = H + f(t).$$

これが $\mathsf{U}$ と $\bar{\mathsf{U}}$ の交わりで起るのである．

これが得られると，大域的な Hamilton 系の意味するものが定式化できるのである．

まず位置空間 M を考え，それから導かれた位相空間 P および状態空間 S を作る．P 上には函数 $T$ が与えられていて，次の性質を満たす：座標 $q^1, \cdots, q^n$ をもつ M 上の任意の局所座標近傍 U 上で

$$T=\frac{1}{2}\sum b^{ij}(q)p_ip_j$$

となり，これは正定値の 2 次形式である．ここで $(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$ は U 上にのっている P の近傍 $\mathsf{U}\times\mathsf{E}^n$ 上に誘導された座標である．

さて $\mathsf{U}_\alpha, \mathsf{U}_\beta, \cdots$ を M 上の種々の局所座標近傍とする．これら $\mathsf{U}_\alpha$ 達のどれもに対して，$\mathsf{U}_\alpha\times\mathsf{E}^1$ 上で定義された函数

$$V_\alpha = V_\alpha(q, t)$$

がある．$\mathsf{U}_\alpha$ と $\mathsf{U}_\beta$ とが交われば，共通部 $\mathsf{U}_\alpha\cap\mathsf{U}_\beta$ 上では

$$V_\alpha - V_\beta = f_{\alpha\beta}(t)$$

($t$ だけの函数) となる．(明らかに $f_{\alpha\beta}+f_{\beta\alpha}=0$ である．また $\mathsf{U}_\alpha\cap\mathsf{U}_\beta\cap\mathsf{U}_\gamma$ 上では

$$f_{\alpha\beta}+f_{\beta\gamma}+f_{\gamma\alpha}=0$$

となる．) $\mathsf{U}_\alpha$ 上にのっている S の部分，すなわち $\mathsf{U}_\alpha\times\mathsf{E}^n\times\mathsf{E}^1$ 上で

$$H_\alpha = T + V_\alpha$$

とおく．$\mathsf{U}_\alpha\times\mathsf{E}^n\times\mathsf{E}^1$ 上で運動方程式が次のように与えられている：

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i}. \end{cases}$$

ここで $(q^i)$ は $\mathsf{U}_\alpha$ 上の局所座標である．これらは，局所座標系には無関係で (すなわち首尾一貫していて)，S 全体上で運動 (或いは流れ) を定義する．ただしつねに $t$ (時間) の増加する方向に運動するものとする．

**注意** 力学ではポテンシャル函数を明示するのが習慣になっているので，われわれの定式化において函数 $V_\alpha$ を書き出したのであるが，実は運動方程式は，

ポテンシャルの**勾配**(gradient)しか要求しない．この勾配はS上の内在的な量(intrinsic quantity)である．詳しくいえば，S上に微分形式 $\varpi$ があって，局所的に

$$\varpi=\sum\frac{\partial V_\alpha}{\partial q^i}dq^i+\sum\frac{\partial V_\alpha}{\partial p_i}dp_i$$

となる．結局次の要請をおくことにより函数 $V_\alpha$ に言及することから解放される：S上に1-形式 $\varpi$ が与えられていて，次を満たす．

(1)　$\varpi$ は $dt$ の項を含まない．

(2)　$d\varpi|_{dt=0}=0.$

Poincaré の補題の逆(3.6節および3.7節．特に39頁の最後の注意)により，これから函数 $V_\alpha$ の存在が出る．

運動の**軌道**(trajectory)とは，この連立微分方程式の任意の特殊解をいう．常微分方程式論により，各点を通って軌道が一意的に存在することがわかる．従って状態空間Sはこれらの曲線で滑らかに満たされている．各曲線に沿って $t$ は絶え間なく増加するが，必ずしもいくらでも大きな値に達するわけではない．(例えば粒子が有限の時間に無限遠に駆け去るかも知れない．)

最後に次の**エネルギー法則**(energy law)に注意する：

任意の軌道に沿って

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}.$$

何故ならば

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt}=\dot{H}&=\sum\frac{\partial H}{\partial q^i}\dot{q}^i+\sum\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial t}\\&=\sum(-\dot{p}_i\dot{q}^i)+\sum\dot{q}^i\dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial t}\\&=\frac{\partial H}{\partial t}.\end{aligned}$$

**注意**　$V_\alpha$ 達を定義し直して，函数 $f_{\alpha\beta}(t)$ 達を結局除くことができるか否か，すなわち $M\times E^1$ 全体上でただ一つのポテンシャル函数がとれるか否かは，次の二つのことに依存する．第一は外力が時間と共に変る仕方，第二はMの位相

である.

位相的困難は，$E^3$ から $z$ 軸を除いた多様体 M における定常磁場の標準的な例から容易にわかる．$z$ 軸上の定常的な電流により生ずる磁場を考えるのである．面倒なことが起るのは，曲面の境界にならぬような閉曲線が M 中に存在するためである．(5.9節の De Rham の定理の状況を参照せよ.)

## 10.3 積分不変式

位置空間 M 中の局所座標近傍 $U=U_\alpha$ 上で次の 1-形式を考える：

$$\omega = \omega_\alpha = \sum p_i dq^i - H\,dt.$$

これは U 上にのっている状態空間の部分 $U\times E^n\times E^1$ 上で定義されている．これらの 1-形式 $\omega_\alpha$ 達は必ずしも S 上の 1-形式をなすようには合致しない．それは交わり $U_\alpha\cap U_\beta$ 上で

$$H_\alpha - H_\beta = V_\alpha - V_\beta = f_{\alpha\beta}(t)$$

となっているからである．もし $V_\alpha$ 達を選んであらゆる $f_{\alpha\beta}(t)=0$ にできれば，そのときは上のような 1-形式が S 全体の上で得られる．これはちょうど大域的に保存的な系の場合，すなわち外力がただ一つのポテンシャル函数 $V$ から導かれる場合である．それは一般には期待できないのであるが，次のことはわかる．すなわち

$$d\omega = d\omega_\alpha = \sum dp_i dq^i - dHdt$$

は，局所座標系に無関係で，S 全体上の 2-形式である．これはつまり $U_\alpha\cap U_\beta$ 上で

$$d\omega_\alpha = d\omega_\beta$$

が成り立つということであるが，その理由は

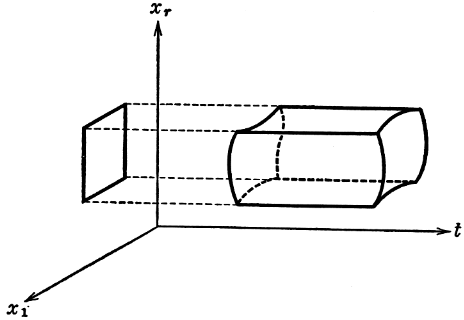
$$dH_\beta dt = d(H_\alpha - f_{\alpha\beta})\,dt = (dH_\alpha - \dot{f}_{\alpha\beta}dt)\,dt = dH_\alpha dt$$

による．この 2-形式を $d\omega$ と書く．(S 全体上の 1-形式 $\omega$ が存在してその $d$ をとった訳ではないのだけれども.)

S の或る部分上に運動方程式の解の $r$-パラメーターの族があるとしよう．パラメーターを $x_1, \cdots, x_r$ と書く．このことの意味は，$(t, \mathrm{x})$-空間の領域 W か

らの写像$\phi$があって次のようになっているということである．W は $t$ 方向に柱体になっていて，上面と底面は曲った鎖になっている：

$$\phi:\ \mathrm{W}\to\mathrm{S}.$$




ここで，局所座標で書けば

$$\begin{cases} q^i = f^i(t, x_1, \cdots, x_r), \\ p_i = g_i(t, x_1, \cdots, x_r), \\ \ t = t \end{cases}$$

であって，各 $(x_i)$ に対してこれは軌道になっている．従って

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f^i}{\partial t} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}(\mathrm{f}, \mathrm{g}, t), \\ \dfrac{\partial g_i}{\partial t} = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i}(\mathrm{f}, \mathrm{g}, t). \end{cases}$$

写像$\phi$は滑らかかつ 1 対 1 とする．よって S 中の $(r+1)$ 次元領域がこれらの軌道によって均質に充満している．

さて $\phi^*(d\omega)$ を考える．

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum dp_i dq^i - \sum \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i dt - \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i dt \\ &= \sum \left(dp_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} dt\right)\left(dq^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dt\right) \end{aligned}$$

であるが，

$$\phi^*\left(dq^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}dt\right) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial t}dt + \sum \frac{\partial f^i}{\partial x_j}dx_j\right) - \frac{\partial f^i}{\partial t}dt = \sum \frac{\partial f^i}{\partial x_j}dx_j,$$

および同様に

$$\phi^*\left(dp_i + \frac{\partial H}{\partial q^i}dt\right) = \sum \frac{\partial q^i}{\partial x_k}dx_k$$

であるから,

$$\phi^*(d\omega) = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial(g_i, f^i)}{\partial(x_j, x_k)}dx_j dx_k$$
$$= \sum A^{jk}(\mathsf{x}, t)\,dx_j dx_k$$

となる. これでわれわれの第一の論点: $\phi^*(d\omega)$ が $dt$ を含まない, が確立された.

$d(d\omega)=0$ であるから, $d[\phi^*(d\omega)]=0$ を得る. ところが

$$d[\phi^*(d\omega)] = \sum \frac{\partial A^{jk}}{\partial t}dt dx_j dx_k + (dx_i dx_j dx_k \text{ の項}) = 0$$

により, 次式が出る:

$$\frac{\partial A^{jk}}{\partial t} = 0.$$

すなわち, $A^{jk}=A^{jk}(\mathsf{x})$ は $t$ に無関係である. よって

$$\phi^*(d\omega) = \sum A^{jk}(\mathsf{x})\,dx_j dx_k$$

と書ける.

状態空間 S 上の $s$ 次微分形式 $\alpha$ が, (これは歴史的な用語であるが) **(絶対) 積分不変式** ((absolute) integral invariant) とは, このような写像 $\phi$ によって与えられるどんな $r$-パラメーターの軌道族に対しても, $\phi^*(\alpha)$ が x-空間だけの上の ($t$ も $dt$ も含まない) $s$-形式であって, かつ $d\alpha=0$ を満たすことをいう. 例えば

$$d\omega,\ (d\omega)^2,\ \cdots,\ (d\omega)^n$$

のどれも積分不変式である. 何故なら

$$d(d\omega)^s = 0$$

であり, しかも

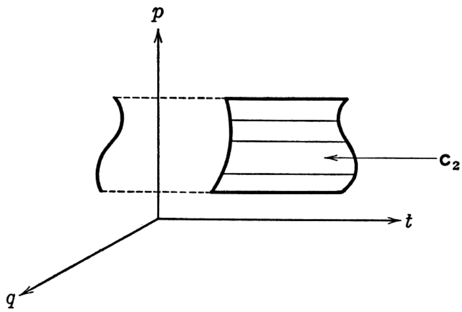
$$\phi^*(d\omega)^s = [\phi^*(d\omega)]^s = [\sum A^{jk}(\mathrm{x})\,dx_j dx_k]^s$$

が $t$ も $dt$ も含まないからである.

状態空間 S 中に，軌道の 1-パラメーター族で満たされた小面分 $\mathrm{c}_2$ を考える. 解析的には $\mathrm{c}_2$ を次のように記述できる：

$$\begin{cases} q^i = q^i(t, y), \\ p_i = p_i(t, y). \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(y) \leqq t \leqq b(y), \\ \quad y_0 \leqq y \leqq y_1. \end{cases}$$

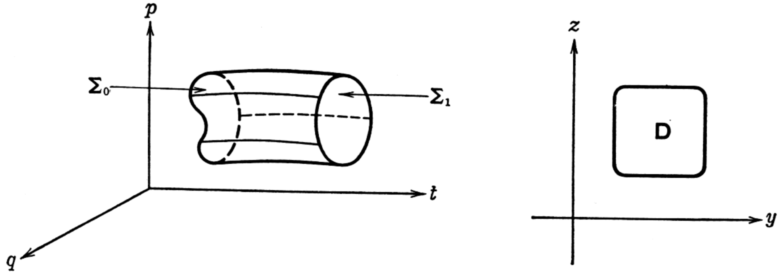



上に論じたことにより，この $p$ と $q$ の式を $d\omega$ に代入して得られる 2-形式は $y, dy$ だけを含む 2-形式である. 従って 0 になる. これから特に

$$\int_{\mathrm{c}_2} d\omega = 0$$

が出る.

次に，S 中に立体の部分，すなわち 3-鎖 $\mathrm{c}_3$ があって，それは軌道の 2-パラ



メーター族で張られているとする：

$$\begin{cases} q^i = q^i(t, y, z), \\ p_i = p_i(t, y, z). \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(y, z) \leqq t \leqq b(y, z), \\ (y, z) \text{ は領域 D 中にある.} \end{cases}$$

すると

$$\partial \mathrm{c}_3 = \Sigma_1 - \Sigma_0 + \mathrm{c}_2$$

となる．ここで $\Sigma_1, \Sigma_0$ はそれぞれ終点，始点の曲面で，側面 $\mathrm{c}_2$ は，$\partial$D 上の点 $(y, z)$ をパラメーターとする軌道の 1-パラメーター族によって張られている．

さて，

$$\int_{\partial \mathrm{c}_3} d\omega = \int_{\mathrm{c}_3} d(d\omega) = 0$$

であり，一方上に示したように

$$\int_{\mathrm{c}_2} d\omega = 0$$

であるから，

$$\int_{\Sigma_1} d\omega = \int_{\Sigma_0} d\omega$$

となる．かくして微分形式 $d\omega$ の極めて著しい性質が確立された：

**$\Sigma_0$ を S 中の，軌道達を横断している(transversal)ような任意の 2-鎖とし，$\Sigma_0$ の各点をその軌道に沿って任意量だけ移動させて生ずる新しい曲面を $\Sigma_1$ とすれば**

$$\int_{\Sigma_1} d\omega = \int_{\Sigma_0} d\omega.$$

$d\omega$ の特殊性質は上の証明に全然使わなかったから，同様の性質が任意の積分不変式についても成り立つことは当然明らかである．すなわち：

**$\alpha$ を S 上の $r$ 次の積分不変式とする．$\mathrm{c}_r$ を，軌道達を横断しているような任意の S 上の $r$-鎖とする．$\mathrm{c}_r'$ を，もう一つのそのような $r$-鎖で，$\mathrm{c}_r$ と $\mathrm{c}_r'$ の点は同一の軌道上の点を対応させることにより 1 対 1 に対応しているとする．**

**すると**

$$\int_{c_r} \alpha = \int_{c_r'} \alpha.$$

推論の順序を逆向きにして，上述の結果中に述べられた性質が実は積分不変式を特徴づけることも証明される．これは É. Cartan [8] になされている．

次に相対的積分不変式に移ろう．

S 上の $r$-形式 $\alpha$ が**相対的積分不変式**(relative integral invariant)とは，$d\alpha$ が積分不変式なることをいう．相対的積分不変式に関する基本的結果は次の通り：

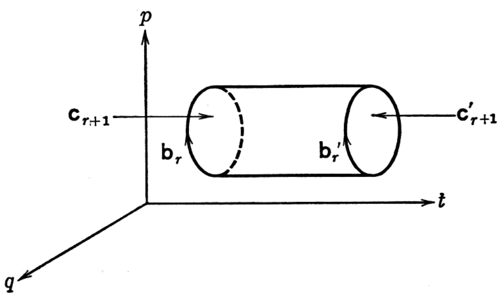
**$\alpha$ を $r$ 次の相対的積分不変式とする．$b_r$ と $b_r'$ を，二つの $r$ 次元境界輪体であって，同一の軌道上の点を対応させることにより $b_r$ と $b_r'$ の間に1対1対応があるとする．すると**

$$\int_{b_r} \alpha = \int_{b_r'} \alpha.$$

これを証明するには，$(r+1)$-鎖 $c_{r+1}$ と $c'_{r+1}$ とをとって

$$b_r = \partial c_{r+1}, \qquad b'_{r+1} = \partial c'_{r+1}$$

ならしめる．しかも $c_{r+1}$ と $c'_{r+1}$ とは同一の軌道上の点を対応させて1対1に対応しているようにとる．




すると，

$$\int_{b_r'} \alpha = \int_{\partial c'_{r+1}} \alpha = \int_{c'_{r+1}} d\alpha = \int_{c_{r+1}} d\alpha = \int_{\partial c_{r+1}} \alpha = \int_{b_r} \alpha.$$

局所的に定義された微分形式

$$\omega = \sum p_i dq^i - H\,dt$$

は，‘それが定義されている範囲では’，1次の相対的積分不変式である．従って，

$$d[\omega(d\omega)^r] = (d\omega)^{r+1}$$

により，次の微分形式

$$\omega\, d\omega,\ \omega(d\omega)^2,\ \cdots,\ \omega(d\omega)^n$$

も，定義範囲では，相対積分不変式である．

特殊化して，あるただ一つの時刻にのみ存在するような鎖を考える．$\alpha$ を任意の $r$-形式とし，c を超平面：$t$=定数，上にあるような S 中の $r$-鎖とすると，明らかに

$$\int_c \alpha = \int_c \alpha \Big|_{dt=0}$$

である．特にこれを $d\omega$ に適用すれば

$$d\omega|_{dt=0} = \sum dp_i dq^i$$

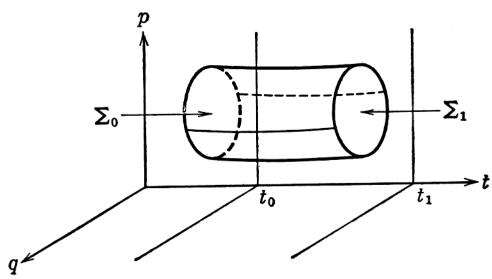
であるから，次の結果を得る．

**$\Sigma_0$ を $t=t_0$ における S 中の 2-鎖とし，$\Sigma_1$ を $\Sigma_0$ の各点をその軌道に沿って動かして得られる 2-鎖とすれば**

$$\int_{\Sigma_0} \sum dp_i dq^i = \int_{\Sigma_1} \sum dp_i dq^i.$$

この定理において $\Sigma_0$ と $\Sigma_1$ とを位相空間中の 2-鎖と思ってよい．

この操作を $(2n)$-形式



$$(d\omega)^n = \pm n!\,(dp_1\cdots dp_n dq^1\cdots dq^n) + \lambda\, dt$$

に適用すれば，**位相密度**(phase density)

$$\mu = dp_1\cdots dp_n dq^1\cdots dq^n$$

が得られるから，次の定理を得る．

**Liouville の定理　時刻 $t_0$ において位相空間中の $2n$ 次元の領域 $\mathrm{D}_0$ が動いて時刻 $t_1$ に領域 $\mathrm{D}_1$ になれば**

$$\int_{\mathrm{D}_0}\mu = \int_{\mathrm{D}_1}\mu.$$

本節を終るに当って，10.5節で必要になる一定理を述べよう．それは積分不変式 $d\omega$ が運動方程式を完全に定めることを示し，それ自身重要な一つの力学的原理である．

**いま**

$$\begin{cases} \dot{q}^i = A^i(t, \mathrm{q}, \mathrm{p}), \\ \dot{p}_i = B_i(t, \mathrm{q}, \mathrm{p}) \end{cases}$$

**を状態空間 S のある領域上の連立微分方程式とし，**

$$d\omega = \sum dp_i dq^i - dHdt$$

**を積分不変式にもつとする．すると**

$$A^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad B_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

何故ならば，

$$\begin{cases} q^i = f^i(t, x_1, \cdots, x_{2n}), \\ p_i = q_i(t, x_1, \cdots, x_{2n}) \end{cases}$$

を一般解とする．従って，$d\omega$ は $dx_i$ 達の項だけで表わされねばならない．このことと，微分方程式

$$\left\{ \frac{\partial f^i}{\partial t} = A^i, \qquad \frac{\partial g_i}{\partial t} = B_i \right\}$$

とから次式が出る．

$$dq^i = A^i dt + \lambda^i, \qquad dp_i = B_i dt + \mu_i.$$

ここで $\lambda^i, \mu_i$ は $dx_j$ 達だけを含む 1-形式である．従って，

$$d\omega = \sum dp_i dq^i - dHdt$$

$$= (\sum A^i \mu_i - \sum B_i \lambda^i)\, dt + \sum \mu_i \lambda^i - \left(\sum \frac{\partial H}{\partial q^i}\lambda^i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i}\mu_i\right) dt.$$

$d\omega$ は $dt$ を含まないから，次式を得る.

$$\sum A^i \mu_i - \sum B_i \lambda^i - \sum \frac{\partial H}{\partial q^i}\lambda^i - \sum \frac{\partial H}{\partial p_i}\mu_i = 0,$$

$$\therefore \quad \sum \left(A^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\mu_i - \sum \left(B_i + \frac{\partial H}{\partial q^i}\right)\lambda^i = 0,$$

$$\therefore \quad \sum \left(A^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)(dp_i - B_i dt) - \sum \left(B_i + \frac{\partial H}{\partial q^i}\right)(dq^i - A^i dt) = 0,$$

$$\therefore \quad \sum \left(A^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) dp_i - \sum \left(B_i + \frac{\partial H}{\partial q^i}\right) dq^i + (\cdots)\, dt = 0.$$

よって求める通り

$$A^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0, \qquad B_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} = 0$$

が出る.

## 10.4 括 弧 式

古典力学の変換理論において，Poisson および Lagrange の**括弧式** (bracket expression) が用いられる．本節ではこれらの式がどのように微分形式と関係しているかを示そう.

それをする前に，わき道に外れて，**Lie のブラケット積** (**交換子積**) を論ずるのはよい考えである．任意の微分可能多様体 N をとり，5.3 節の接ベクトルの定義および 5.3 節の終りのベクトル場の定義を想起しよう．N 上のベクトル場 v を，N 上の函数を N 上のもう一つの函数に移す作用素と考えてよい:

$$\mathsf{v}:\ \mathsf{F}^0(\mathsf{N}) \to \mathsf{F}^0(\mathsf{N}).$$

局所座標系 $x^1, \cdots, x^n$ に関して v を表わす式が

$$\mathsf{v} = \sum a^i(\mathsf{x}) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

ならば

$$\mathrm{v}(f) = \sum a^i(\mathrm{x}) \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

である．これが局所的に v が函数 $f$ に対してなす効果である．この式から，或いは N の各点 $P$ に対して v が $P$ での接ベクトル(方向微分)と対応させるという，v の定義そのものから，N 上の任意の二つの函数 $f, g$ に対して

$$\mathrm{v}(f \cdot g) = \mathrm{v}(f) \cdot g + f \cdot \mathrm{v}(g)$$

となることがわかる．v と w とを N 上の二つのベクトル場とするとき，v と w の **Lie のブラケット積**(Lie bracket)を次式で定義する：

$$[\mathrm{v}, \mathrm{w}] = \mathrm{v} \circ \mathrm{w} - \mathrm{w} \circ \mathrm{v}.$$

これはまた N 上の一つのベクトル場になる．局所座標で

$$\mathrm{v} = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \mathrm{w} = \sum b^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

ならば，計算により次式がわかる：

$$[\mathrm{v}, \mathrm{w}] = \sum \left( \sum a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} - \sum b^i \frac{\partial a^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

(注意すべき主要点は，2 次偏微分係数が互いに打消し合うことである.) 次の代数的恒等式は容易に確かめられる：

(i) $[\mathrm{v}, \mathrm{v}] = 0.$

(ii) $[\mathrm{w}, \mathrm{v}] + [\mathrm{v}, \mathrm{w}] = 0.$

(iii) $[\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2, \mathrm{w}] = [\mathrm{v}_1, \mathrm{w}] + [\mathrm{v}_2, \mathrm{w}].$

(iv) $[[\mathrm{u}, \mathrm{v}], \mathrm{w}] + [[\mathrm{v}, \mathrm{w}], \mathrm{u}] + [[\mathrm{w}, \mathrm{u}], \mathrm{v}] = 0$ **(Jacobi 恒等式)**.

さて力学系に戻る．前のように，位置空間 M に結びつけられた位相空間を P とする．$\alpha$ で P 上の微分形式

$$\alpha = \sum p_i dq^i$$

を示す．従って 10.1 節のように

$$d\alpha = \sum dp_i dq^i$$

となる．

**Poisson のブラケット(括弧式)** 位相空間 P 上の実函数の各対 $f, g$ に対して，新しい函数 $(f, g)$ を次式で定義する：

$$n(dfdg)\wedge(d\alpha)^{n-1}=(f,g)(d\alpha)^n.$$

局所座標では

$$(d\alpha)^{n-1}=[(n-1)!]\sum(dp_1dq^1)\cdots(\widehat{dp_idq^i})\cdots(dp_ndq^n)$$

および

$$(d\alpha)^n=(n!)dp_1dq^1\cdots dp_ndq^n$$

であるから，これから $(f,g)$ に対し次の局所的表示式が得られる．

$$(f,g)=\sum\frac{\partial(f,g)}{\partial(p_i,q^i)}.$$

定義から次の関係式が得られる．

(i)　$(f,f)=0.$

(ii)　$(f,g)+(g,f)=0.$

(iii)　$(f,g_1+g_2)=(f,g_1)+(f,g_2).$

$(df)d(g_1g_2)=g_1(dfdg_2)+g_2(dfdg_1)$ を用いて

(iv)　$(f,g_1g_2)=g_1\cdot(f,g_2)+g_2\cdot(f,g_1)$

も得られる．恒等式(iii)と(iv)とを一緒にして次のようにいうこともできる：$f$ を固定すれば

$$g\to(f,g)$$

は P 上のベクトル場 $\mathsf{v}_f$ となる．

Lie のブラケットと Poisson のブラケットの間の基本的関係は次式で与えられる．

(v)　$\mathsf{v}_{(f,g)}=[\mathsf{v}_f,\mathsf{v}_g].$

さて

$$\mathsf{v}_{(f,g)}(h)=((f,g),h)$$

および

$$\begin{aligned}[\mathsf{v}_f,\mathsf{v}_g](h)&=\mathsf{v}_f(\mathsf{v}_g(h))-\mathsf{v}_g(\mathsf{v}_f(h))\\&=\mathsf{v}_f(g,h)-\mathsf{v}_g(f,h)\\&=(f,(g,h))-(g,(f,h))\\&=-((g,h),f)-((h,f),g)\end{aligned}$$

であるから，(v)は次の **Jacobi の関係式**(Jacobi's relation)に同値である．

(vi)　$((f,g),h)+((g,h),f)+((h,f),g)=0.$

この関係式((v)または(vi))を，或いは長い直接計算によっても証明できるが，また次のような，ベクトル場が局所的には局所座標系の各座標函数に対する効果によって完全に定まるという事実に基づく，もっと洗練度の高い論法でも証明される．

まず第一に，

$$(f,q^i)=\sum\frac{\partial(f,q^i)}{\partial(p_j,q^j)}=\sum\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial p_j} & \dfrac{\partial f}{\partial q^j}\\ 0 & \delta^i{}_j\end{vmatrix},$$

$$\therefore\quad (f,q^i)=\frac{\partial f}{\partial p_i}$$

となる．これは次のように解釈される．

$$\mathsf{v}_{q^i}=-\frac{\partial}{\partial p^i}.$$

同様に

$$(f,p_i)=-\frac{\partial f}{\partial q^i},\qquad \mathsf{v}_{p_i}=\frac{\partial}{\partial q^i}$$

となる．これらの関係により，(vi)は，$g$ と $h$ とがどちらも座標函数 $\{q^1,\cdots,p_n\}$ のどれかであるときには容易に得られる．これは，$x$ が座標函数のどれかであるとき

$$\mathsf{v}_{(f,x)}=[\mathsf{v}_f,\mathsf{v}_x]$$

を意味する．何故なら両辺のベクトル場が，座標函数 $q^j$ や $p_j$ の任意の一つに適用したとき一致するからである．よって，'任意の' 函数 $h$ に対して

$$((f,x),h)+((x,h),f)+((h,f),x)=0$$

が成り立つ．さてこの等式は任意の函数 $f,h$ と任意の座標函数 $x$ について確立されたが，これは

$$\mathsf{v}_{(h,f)}x=[\mathsf{v}_h,\mathsf{v}_f]x$$

とも解釈できる．従ってベクトル場

$$\mathsf{v}_{(h,f)} \quad \text{および} \quad [\mathsf{v}_h, \mathsf{v}_f]$$

は，すべての座標函数上で一致するから，一致せねばならない．よって，あらゆる $f, g, h$ に対して

$$\mathsf{v}_{(h,f)}(g) = [\mathsf{v}_h, \mathsf{v}_f](g)$$

となり，(v)と(vi)の証明が完了した．

状態空間 S 上の函数の対に対しても，$t$ を単にパラメーターとして扱うことによって，ブラケット積が適用される．

S 上の函数 $f$ が，各軌道の上で定数であるとき，$f$ を運動方程式の**第1積分** (first integral)という．そのときには，

$$0 = \frac{df}{dt} = \sum \frac{\partial f}{\partial q^i}\dot{q}^i + \sum \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= \sum \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= (H, f) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

となる．従って，第1積分に対する偏微分方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} = (f, H)$$

となる．

**Lagrange のブラケット(括弧式)**　いま

$$\phi: \mathsf{E}^2 \to \mathsf{P}$$

とし，$\mathsf{E}^2$ は直角座標 $u, v$ をもつ Euclid 平面とする．すると $\phi^*(d\alpha)$ は $\mathsf{E}^2$ 上の 2-形式である．(ここで前のように $d\alpha = \sum dp_i dq^i$ である．) よって

$$\phi^*(d\alpha) = [u, v]dudv$$

とおいて，**Lagrange のブラケット** $[u, v]$ が定義される．これは次の局所的表示式をもつ：

$$[u, v] = \sum \frac{\partial(p_i, q^i)}{\partial(u, v)}.$$

## 10.5 接触変換

ここでは広大なトピックに簡略に触れるだけである．簡単のために，局所的問題だけを扱い，接触変換を座標の変換として考える．

まず時間に無関係な変換の場合を考える．例のように，$q^i, p_i$ で位相空間 P の局所座標を示す．新座標 $\bar{q}^i, \bar{p}_i$ を考える：

$$\begin{cases} \bar{q}^i = \bar{q}^i(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n), \\ \bar{p}_i = \bar{p}_i(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n). \end{cases}$$

これは古い座標とは，ただ一つの要求を除いては，関係がないとする．その要求とは，

$$\alpha = \sum p_i dq^i, \qquad \bar{\alpha} = \sum \bar{p}_i d\bar{q}^i$$

として

$$d\bar{\alpha} = d\alpha$$

である．これで**同次接触変換**(homogeneous contact transformation) と以下称するものが定義された．

$d(\bar{\alpha}-\alpha)=0$ で，われわれは局所的にしか考えていないから，上の条件は

$$\bar{\alpha} = \alpha + d\phi.$$

$\phi$ は P 上の実函数と表わしてもよい．関係 $d\bar{\alpha}=d\alpha$，すなわち

$$\sum d\bar{p}_i d\bar{q}^i = \sum dp_i dq^i$$

において，$d\bar{p}_i$ と $d\bar{q}^i$ とを，その $dp_j, dq^k$ での表示式でおきかえれば次式が得られる．

$$\left\{ \sum \frac{\partial(\bar{p}_i, \bar{q}^i)}{\partial(q^j, q^k)} = 0, \qquad \sum \frac{\partial(\bar{p}_i, \bar{q}^i)}{\partial(p_j, p_k)} = 0, \qquad \sum \frac{\partial(\bar{p}_i, \bar{q}^i)}{\partial(p_j, q^k)} = \delta^j{}_k \right\}.$$

(これらの関係式は Lagrange のブラケットを用いても表わされる.) 同様に

$$\left\{ \sum \bar{p}_i \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^j} = p_j + \frac{\partial \phi}{\partial q^j}, \qquad \sum \bar{p}_i \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial p_j} = \frac{\partial \phi}{\partial p_j} \right\}.$$

運動方程式

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i} \end{cases}$$

があるとき，これらが同じ型の方程式に変換されることを示そう．何故ならば，われわれの接触変換によって座標を変えたとき

$$\begin{cases} \dot{\bar{q}}^i = A^i, \\ \dot{\bar{p}}_i = -B_i \end{cases}$$

に達したとすれば，

$$\begin{cases} A^i = \sum \dfrac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^j}\dfrac{\partial H}{\partial p_j} - \sum \dfrac{\partial \bar{q}^i}{\partial p_j}\dfrac{\partial H}{\partial q^j}, \\ B_i = -\sum \dfrac{\partial \bar{p}_i}{\partial q^j}\dfrac{\partial H}{\partial p_j} + \sum \dfrac{\partial \bar{p}_i}{\partial p_j}\dfrac{\partial H}{\partial q^j} \end{cases}$$

となる．第1式に

$$d\bar{p}_i = \sum \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial q^k}dq^k + \sum \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial p_k}dp_k$$

をかけ，第2式に

$$d\bar{q}^i = \sum \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^k}dq^k + \sum \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial p_k}dp_k$$

をかけて加えれば，整理して次式を得る．

$$\begin{aligned} \sum A^i d\bar{p}_i + \sum B_i d\bar{q}^i &= \sum \frac{\partial H}{\partial q^j}dq^j + \sum \frac{\partial H}{\partial p_k}dp_k \\ &= dH - \frac{\partial H}{\partial t}dt. \end{aligned}$$

よって

$$A^i = \frac{\partial H}{\partial \bar{p}_i}, \qquad B_i = \frac{\partial H}{\partial \bar{q}^i}.$$

従って新座標での運動方程式はちょうど

$$\begin{cases} \dot{\bar{q}}^i = \dfrac{\partial H}{\partial \bar{p}_i}, \\ \dot{\bar{p}}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial \bar{q}^i} \end{cases}$$

となる．

さて一般の状態に移ろう．状態空間S上の力学系

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i} \end{cases}$$

から出発して，S 上の座標変換

$$\begin{cases} \bar{q}^i = \bar{q}^i(t, q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n), \\ \bar{p}_i = \bar{p}_i(t, q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n), \\ t = t \end{cases}$$

を考える．例のように

$$\omega = \sum p_i dq^i - H\,dt$$

とおく．この座標変換は，もし函数 $\bar{H}$ と函数 $\phi$ が存在して，対応する 1-形式 $\bar{\omega}$ を

$$\bar{\omega} = \sum \bar{p}_i d\bar{q}^i - \bar{H}\,dt$$

によって定義すれば，

$$\bar{\omega} = \omega + d\phi$$

が満たされるとき，すなわち同値な形でいえば

$$d\bar{\omega} = d\omega$$

であるとき，**接触変換**(contact transformation)であるという．

第一の基本的な結果は，新座標における運動方程式はちょうど

$$\begin{cases} \dot{\bar{p}}^i = \dfrac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_i}, \\ \dot{\bar{p}}_i = -\dfrac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}^i} \end{cases}$$

となるということである．

何故ならば，新しい運動方程式が何であろうと，それは

$$d\bar{\omega} = \sum d\bar{p}_i d\bar{q}^i - d\bar{H} dt$$

を積分不変式としてもつ．一方 10.3 節の最後の結果により，これを積分不変式にもつ方程式は上述のものに限るのである．（このすっきりした証明を，直接計算の方法と比較して見よ！）

特別の型の接触変換が次のようにして得られる.

$$\phi(t, x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n)$$

を，次の独立性の条件:

$$\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i \partial y^j}\right| \neq 0$$

を満たす $2n+1$ 変数の函数とする.

$\phi=\phi(t, q^1, \cdots, q^n, \bar{q}^1, \cdots, \bar{q}^n)$ とおき，さらに

$$p_i = \frac{\partial\phi}{\partial q^i}, \qquad \bar{p}_i = -\frac{\partial\phi}{\partial \bar{q}^i}$$

とおく. $q$ と $p$ とを固定すると $\bar{q}$ が上の方程式の第1団から定まる(上の行列式が0でないから). すると第2団により $\bar{p}$ 達が定まる. そして次式を得る.

$$\begin{aligned} d\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial t}dt + \sum \frac{\partial\phi}{\partial q^i}dq^i + \sum \frac{\partial\phi}{\partial \bar{q}^i}d\bar{q}^i \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial t}dt + \sum p_i dq^i - \sum \bar{p}_i d\bar{q}^i, \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \omega - \bar{\omega} &= -(\sum \bar{p}_i d\bar{q}^i - \bar{H}\,dt) + (\sum p_i dq^i - H\,dt) \\ &= d\phi - \frac{\partial\phi}{\partial t}dt + \bar{H}\,dt - H\,dt \end{aligned}$$

を完全微分ならしめるためには

$$\bar{H} = H + \frac{\partial\phi}{\partial t}$$

とおけばよい. そのとき

$$\bar{\omega} = \omega - d\phi$$

となる.

最も重要な場合は，$\phi$ が **Hamilton-Jacobi の方程式**

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(t, q, \bar{q}) + H\left(t, q, \cdots, \frac{\partial\phi}{\partial q^i}, \cdots\right) = 0$$

の解の場合である. この状況下では $\bar{H}=0$ で，新運動方程式は簡単に

$$\begin{cases} \dot{\bar{q}}^i = 0, \\ \dot{\bar{p}}_i = 0 \end{cases}$$

となるから，その解は

$$\bar{q}^i = \text{定数}, \qquad \bar{p}_i = \text{定数}$$

となる．これを初めの系は**平衡状態に変換された**(transformed to equilibrium)という．

もう一つの点を注意しよう．もし接触変換が定常的，すなわち時間に無関係ならば，それは同次接触変換に同値である．何故ならば

$$\begin{cases} \bar{q}^i = \bar{q}^i(q, p), \\ \bar{p}_i = \bar{p}_i(q, p) \end{cases}$$

および

$$(\sum \bar{p}_i d\bar{q}^i - \bar{H}\,dt) = (\sum p_i dq^i - H\,dt) + d\phi$$

として，係数を比べれば

$$\begin{cases} \sum \bar{p}_i \dfrac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^j} = p_j + \dfrac{\partial \phi}{\partial q^j}, \\ \sum \bar{p}_i \dfrac{\partial \bar{q}^i}{\partial p_k} = \dfrac{\partial \phi}{\partial p_k}, \\ \qquad \bar{H} = H - \dfrac{\partial \phi}{\partial t}. \end{cases}$$

$q, p, \bar{q}, \bar{p}$ は $t$ と独立だから，初めの二つの方程式から次式が出る：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial q^j} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial p_k} = 0.$$

よって $\partial\phi/\partial t$ は $t$ だけの函数である．これから明らかに

$$\phi(t, q, p) = f(t) + \psi(q, p)$$

が出る．従って，

$$\sum \bar{p}_i d\bar{q}^i = \sum p_i dq^i + d\psi$$

となる．これは求める通り同次接触変換なることを意味している．

いわゆる**無限小接触変換** (infinitesimal contact transformation) なるものを簡潔に調べよう．

問題とするのは

$$\begin{cases} \bar{q}^i = q^i + \varepsilon f^i, \\ \bar{p}_i = p_i + \varepsilon g_i \end{cases}$$

が，$\varepsilon$ について 1 次より高次の無限小を除いて，接触変換になるのはいつかということである．同次(定常的)の場合にのみ関心を限ることにする．さて

$$\sum \bar{p}_i d\bar{q}^i - \sum p_i dq^i = \varepsilon\, d\phi,$$

$$\therefore \quad \sum (p_i + \varepsilon g_i)(dq^i + \varepsilon\, df^i) - \sum p_i dq^i = \varepsilon\, d\phi,$$

$$\therefore \quad \varepsilon \left( \sum g_i dq^i + \sum p_i df^i \right) = \varepsilon\, d\phi.$$

よって条件は

$$\sum g_i dq^i + \sum p_i df^i = d\phi$$

である．

$$\psi = \phi - \sum p_i f^i$$

とおけば，上の条件は

$$\sum g_i dq^i - \sum f^i dp_i = d\psi$$

となる．すなわち

$$g_i = \frac{\partial \psi}{\partial q^i}, \qquad f^i = -\frac{\partial \psi}{\partial p_i}.$$

結局次の**無限小接触変換の一般式**を得る：

$$\begin{cases} \bar{q}^i = q^i - \varepsilon \dfrac{\partial \psi}{\partial p_i}, \\[2ex] \bar{p}_i = p_i + \varepsilon \dfrac{\partial \psi}{\partial q^i}. \end{cases}$$

ここで，$\psi$ はこの無限小接触変換の**母函数** (generating function) と呼ばれる．

## 10.6 流体力学

$E^3$ 中の領域を運動する流体を考える．通常のように位置ベクトルを

$$\mathsf{x} = (x, y, z) = (x^1, x^2, x^3)$$

とする．各時刻 $t$ において $\mathsf{x}$ での速度を $\mathsf{v}$ とする．

$$\mathsf{v} = \mathsf{v}(t, \mathsf{x}) = (u, v, w) = (v^1, v^2, v^3).$$

流体の密度はスカラーである：

$$\rho = \rho(t, \mathbf{x}).$$

本節では曲面の面積要素ベクトルを $\sigma$ と書く：

$$\sigma = (dydz, dzdx, dxdy).$$

(4.5 節 53 頁参照).

$c_3$ を空間に固定した 3 次元領域とすれば，$c_3$ の各点において単位時間あたりの質量の変化は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz$$

である．従って，$c_3$ 中の全質量の時間微係数は

$$\int_{c_3} \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz$$

である．物質の保存を仮定するから，これは流体の境界を通しての流量からの結果でなければならない．よって次式を得る：

$$\int_{c_3} \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz = -\int_{\partial c_3} \rho \mathbf{v} \cdot \sigma.$$

Gauss の定理によって(それは Stokes の定理の特別の場合である)，

$$\int_{\partial c_3} \rho \mathbf{v} \cdot \sigma = \int_{c_3} \mathrm{div}\,(\rho \mathbf{v})\, dxdydz$$

である．$c_3$ を任意にとることにより，上の二つの積分を等しいとおいて，次の**連続方程式** (continuity equation) を得る：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

これが流体が満たさねばならぬ必要条件である．これから出る結果のいくつかを述べよう．

$$\Omega = \rho(dx^1 - v^1 dt)(dx^2 - v^2 dt)(dx^3 - v^3 dt)$$

とおく．$d\Omega$ を計算するために

$$\beta = (dx^1 - v^1 dt)(dx^2 - v^2 dt)(dx^3 - v^3 dt)$$

とおく．よって

$$d\beta = -\frac{\partial v^1}{\partial x^1}dx^1dtdx^2dx^3 + dx^1\left(\frac{\partial v^2}{\partial x^2}dx^2dt\right)dx^3 - dx^1dx^2\left(\frac{\partial v^3}{\partial x^3}dx^3dt\right)$$
$$= (\mathrm{div}\,\mathsf{v})\,dtdx^1dx^2dx^3,$$
$$\therefore\quad d\Omega = d(\rho\beta) = d\rho\wedge\beta + \rho\,d\beta$$
$$= \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}dt + \sum\frac{\partial\rho}{\partial x^i}dx^i\right)\wedge\beta + \rho\,(\mathrm{div}\,\mathsf{v})(dtdx^1dx^2dx^3)$$
$$= \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum v^i\frac{\partial\rho}{\partial x^i} + \rho\,(\mathrm{div}\,\mathsf{v})\right](dtdx^1dx^2dx^3).$$

かくして連続方程式は次の関係式に同値である.

$$d\Omega = 0.$$

流体を初期条件を用いて(或いは他のパラメーターで)表わしたものを

$$\mathsf{x} = \mathsf{x}(t, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$$

とする. 従って $\alpha^i$ 達がパラメーターで

$$\frac{\partial\mathsf{x}}{\partial t} = \mathsf{v}$$

である. かくして

$$(dx^i - v^idt) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial t}dt + \sum\frac{\partial x^i}{\partial\alpha^j}d\alpha^j\right) - v^idt$$
$$= \sum\frac{\partial x^i}{\partial\alpha^j}d\alpha^j$$

である. 従って

$$\Omega = \rho\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)}d\alpha^1d\alpha^2d\alpha^3$$
$$= A(t, \alpha)\,d\alpha^1d\alpha^2d\alpha^3$$

となる. $d\Omega=0$ であるから, $\partial A/\partial t=0$ を得る:

$$\Omega = A(\alpha)\,d\alpha^1d\alpha^2d\alpha^3.$$

これは, $\Omega$ が流体に対して, 10.3節に述べた意味で積分不変式となることを意味する. 従って次の結果が得られる.

**4次元の $(t, \mathsf{x})$-空間において $c_3, c_3'$ が 3-鎖で, その間に, 流体の同一の軌道上にある点を対応させることによって1対1の対応があるものとする. すると**

$$\int_{c_3}\Omega = \int_{c_3'}\Omega.$$

特に $c_3$ のすべての点が同時に存在すれば，すなわち一定の時刻 $t_0$ にあれば，次式が成り立つ：

$$\int_{c_3}\Omega = \int_{c_3}\Omega\Big|_{t=t_0} = \int_{c_3}\rho\, dxdydz.$$

かくして，時刻 $t_0$ に領域 $c_3^{(0)}$ をとり，それが運動して行って時刻 $t_1$ に $c_3^{(1)}$ になったとすれば，

$$\int_{c_3^{(0)}}\rho\, dxdydz = \int_{c_3^{(1)}}\rho\, dxdydz$$

を得る．これは流れの中で質量が保存されることをいっているのであって，質量保存則の別の形である．

さて動力学の状態に進むことにしよう．われわれの流体は粘性がないとする．従って圧力は，各点でこの点を通る各曲面要素に垂直に働く単位面積あたりの力であって，つねに同じ大きさである．

$p = p(t, \mathsf{x}) =$ 圧力，

$\mathsf{F} = \mathsf{F}(t, \mathsf{x}) =$ 単位質量あたりの物体力(body force)(外力といってもよい)

とする．

$c_3$ を空間の固定した領域とする．$c_3$ 中の全物質の総加速度は

$$\int_{c_3}\rho\frac{d\mathsf{v}}{dt}dxdydz$$

である．考えている時刻では，これは $c_3$ 中の物質に働く総力

$$\int_{c_3}\rho\mathsf{F}\, dxdydz - \int_{\partial c_3}p\sigma$$

に等しくなければならない．さて Gauss の定理の一変形†により，

$$\int_{\partial c_3}p\sigma = \int_{c_3}(\mathrm{grad}\, p)\, dxdydz$$

---

† 普通の簡単な証明は，両辺と定数ベクトル $\mathsf{a}$ との内積をとり，それに Gauss の定理および次の事実：

$$\mathrm{div}(p\mathsf{a}) = (\mathrm{grad}\, p)\cdot\mathsf{a}$$

を適用するのである．

であるから，

$$\int_{C_3}\left(\rho\frac{d\mathsf{v}}{dt}-\rho\mathsf{F}+\mathrm{grad}\,p\right)dxdydz=0$$

となる．これから **Euler の運動方程式** (Euler equation of motion)

$$\frac{d\mathsf{v}}{dt}=\mathsf{F}-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p$$

が出る．

ここでは解釈は次の通り：

$$\frac{d\mathsf{v}}{dt}=\frac{\partial\mathsf{v}}{\partial t}+\sum\frac{\partial\mathsf{v}}{\partial x^i}v^i.$$

物体力(外力) $\mathsf{F}$ が保存的と仮定しよう：

$$\mathsf{F}=-\mathrm{grad}\ V.$$

ただし

$$V=V(t,\mathsf{x})$$

は力のポテンシャルである．

$p$ と $\rho$ の間に函数関係があるという仮定を付加する．すなわち

$$d\rho\wedge dp=0$$

とする．これは例えば**等温運動** (isothermal motion) のときは成り立っている．さてこのとき函数 $q=q(t,\mathsf{x})$ を

$$q=\int_0^{(t,\mathsf{x})}\frac{dp}{\rho}$$

で定義する．従って

$$dq=\frac{dp}{\rho}$$

である．運動方程式は

$$\frac{d\mathsf{v}}{dt}=-\mathrm{grad}\,(V+q)$$

と書ける．すなわち

$$\frac{du}{dt}=-\frac{\partial}{\partial x}(V+q),\qquad 等々,$$

である．すなわち

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial x}(V+q),\qquad \text{等々},$$

である．

$$\begin{aligned}E&=\frac{1}{2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})+V+q\\&=\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)+V+q\end{aligned}$$

とおく．これは**単位質量あたりのエネルギー**(energy per unit mass)である．最後に**渦度ベクトル**(vorticity)を

$$\boldsymbol{\xi}=(\xi,\eta,\zeta)=\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z},\ \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

で定義する．計算しよう．

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}&=u\frac{\partial u}{\partial x}+\left(v\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(V+q)\\&=\left(v\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\left(v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\&=v\zeta-w\eta.\end{aligned}$$

同様にして

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}&=v\zeta-w\eta\\\frac{\partial E}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial t}&=w\xi-u\zeta\\\frac{\partial E}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial t}&=u\eta-v\xi\end{aligned}\right\}.$$

(これらの式は次のベクトル式と同値である．

$$\operatorname{grad}E+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=\mathbf{v}\times\boldsymbol{\xi}.)$$

さて次の微分形式を考える：

$$\omega=u\,dx+v\,dy+w\,dz-E\,dt.$$

すると次式が得られる．

$$d\omega = (\xi\, dydz + \eta\, dzdx + \zeta\, dxdy)$$
$$\quad + dt(u_t dx + v_t dy + w_t dz) - (E_x dx + E_y dy + E_z dz)\, dt,$$
$$d\omega = (\xi\, dydz + \eta\, dzdx + \zeta\, dxdy)$$
$$\quad + dt[(v\zeta - w\eta)\, dx + (w\xi - u\zeta)\, dy + (u\eta - v\xi)\, dz].$$

実は，$d\omega$ は積分不変式となり，従って $\omega$ は相対的積分不変式である．これは Hamilton の力学系と比較することにより，間接にわかる．何故ならば，暫らくの間 $x, y, z, u, v, w, t$ を独立変数と思えば，運動方程式は次のようになる．

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x} &= u, & \dot{u} &= -\frac{\partial}{\partial x}(V+q) \\ \dot{y} &= v, & \dot{v} &= -\frac{\partial}{\partial y}(V+q) \\ \dot{z} &= w, & \dot{w} &= -\frac{\partial}{\partial z}(V+q) \end{aligned}\right\},$$

すなわち

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial E}{\partial u}, & \dot{u} &= -\frac{\partial E}{\partial x} \\ \dot{y} &= \frac{\partial E}{\partial v}, & \dot{v} &= -\frac{\partial E}{\partial y} \\ \dot{z} &= \frac{\partial E}{\partial w}, & \dot{w} &= -\frac{\partial E}{\partial z} \end{aligned}\right\}$$

となる．これによりわれわれの主張は明らかとなる．従って，$\mathsf{c}_2, \mathsf{c}_2'$ が $(t, \mathsf{x})$-空間の 2-鎖で，対応点が同一の軌道上にあるような 1 対 1 対応下にあれば，

$$\int_{\mathsf{c}_2} d\omega = \int_{\mathsf{c}_2'} d\omega$$

となる．特に，$\mathsf{c}_2^{(0)}$ が時刻 $t_0$ における $\mathsf{E}^3$ 中の 2-鎖で，それが運動して行って時刻 $t_1$ に $\mathsf{c}_2^{(1)}$ に達すれば次式が成り立つ：

$$\int_{\mathsf{c}_2^{(0)}} (\xi\, dydz + \eta\, dzdx + \zeta\, dxdy) = \int_{\mathsf{c}_2^{(1)}} (\xi\, dydz + \eta\, dzdx + \zeta\, dxdy).$$

これが**渦動保存**(conservation of vorticity)に関する **Helmholtz の定理**である．第一の積分においては $\xi = \xi(t_0, \mathsf{x})$ 等々の意に，また第二の積分において

は $\xi=\xi(t_1, \mathsf{x})$ 等々の意に解さねばならない．重要な帰結は，Helmholtz がさらに与えた次の結果である：**固定した時刻 $t_0$ に渦動が恒等的に消えると仮定すれば，それはつねに消える．** 何故ならば，上の公式により

$$\int_{\mathsf{c}_2^{(1)}} (\xi\, dydz + \cdots) = 0$$

が各時刻 $t_1$ における各 2-鎖 $\mathsf{c}_2^{(1)}$ に対して成り立つ．それは明らかに，積分内部の函数が 0 にならねばならないことを意味している．

## 10.7　問　　題

**1.** 70 頁および再び 215-216 頁で，多様体 M 上のベクトル場 $\mathsf{v}$ を，M 上の各函数 $f$ をもう一つの函数に移す写像であって，次の規則を満たすものとして定義した：

$$\mathsf{v}(f+g) = \mathsf{v}(f) + \mathsf{v}(g),$$
$$\mathsf{v}(fg) = f\cdot\mathsf{v}(g) + \mathsf{v}(f)\cdot g.$$

すると局所的には

$$\mathsf{v} = \sum a^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

となるのであった．われわれはたびたびベクトル場と 1-形式の間の双対性に言及して来た（例えば 154 頁，174 頁参照）．さてこのことを，M 上の各ベクトル場 $\mathsf{v}$ と各 1-形式 $\sigma$ に対し一つのスカラー $(\sigma, \mathsf{v})$ を対応させることによって，もっと具体化しよう：局所的に，$\mathsf{v}$ が上の表示をもち，さらに $\sigma$ の表示式が

$$\sigma = \sum b_i(x)\,dx^i$$

ならば

$$(\sigma, \mathsf{v}) = \sum a^i(x)b_i(x)$$

とおく．このとき次のことを証明せよ．

$$(\sigma_1+\sigma_2, \mathsf{v}) = (\sigma_1, \mathsf{v}) + (\sigma_2, \mathsf{v}),$$
$$(\sigma, \mathsf{v}_1+\mathsf{v}_2) = (\sigma, \mathsf{v}_1) + (\sigma, \mathsf{v}_2),$$
$$(g\sigma, \mathsf{v}) = g\cdot(\sigma, \mathsf{v}) = (\sigma, g\mathsf{v}).$$

（$g$ は任意のスカラーである．）またこの操作は内在的な（すなわち局所座標によ

らない)特徴づけ:

$$(dg, \mathsf{v}) = \mathsf{v}(g)$$

をもつことを示せ.

**2.** 同様に2-形式と2-ベクトルの間の内積が

$$(\sigma_1 \wedge \sigma_2, \mathsf{v}_1 \wedge \mathsf{v}_2) = \begin{vmatrix} (\sigma_1, \mathsf{v}_1) & (\sigma_1, \mathsf{v}_2) \\ (\sigma_2, \mathsf{v}_1) & (\sigma_2, \mathsf{v}_2) \end{vmatrix}$$

で与えられることを示せ.

**3.** さて, これらのことを Lie のブラケットと関係づける次の公式を証明せよ.

$$(d\sigma, \mathsf{v} \wedge \mathsf{w}) + (\sigma, [\mathsf{v}, \mathsf{w}]) = \mathsf{v}\{(\sigma, \mathsf{w})\} - \mathsf{w}\{(\sigma, \mathsf{v})\}.$$

**4.** 上のことを Frobenius の積分定理(7.3節)と結びつけて, 次の結果を確立せよ: $\mathsf{v}_1, \cdots, \mathsf{v}_r$ を $\mathsf{E}^n$ 中の0の近傍上のベクトル場で, 各点で1次独立とする. 各 $i$ と $j$ に対して, $[\mathsf{v}_i, \mathsf{v}_j]$ が $\mathsf{v}_1, \cdots, \mathsf{v}_r$ の1次結合とする. すると, 0の或る近傍上に座標系 $x^1, \cdots, x^n$ が存在して

$$\mathsf{v}_i = \sum_{j=1}^{r} a_i{}^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j} \qquad (i=1, \cdots, r)$$

となる.

**5.** $\mathsf{v}_1, \cdots, \mathsf{v}_r$ を $\mathsf{E}^n$ 中の0の近傍上のベクトル場で, 各点で1次独立とする. 各ブラケット $[\mathsf{v}_i, \mathsf{v}_j]$ が0になると仮定する. このとき, 局所座標系 $x^1, \cdots, x^n$ が存在して

$$\mathsf{v}_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (i=1, \cdots, r)$$

となることを証明せよ.

**6.** $u_1, \cdots, u_n$ を $x^1, \cdots, x^n$ の函数とし, **ヤコビアン行列**(Jacobian matrix)を $J$ とする:

$$J = \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x^j} \right\|.$$

いま $J=A+B$, $A$ は対称行列, $B$ は歪対称行列と表わす. すなわち $A=\|a_{ij}\|$, $B=\|b_{ij}\|$,

$$a_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j}+\frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right),\qquad b_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j}-\frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right)$$

となる.

(i)　$B=0$ と仮定する．このとき $df=\sum u_i dx^i$ を満たす函数 $f$ があることを証明せよ.

(ii)　$A=0$ と仮定する．このとき $J$ は定数行列で，$u_i$ 達は $x^1, \cdots, x^n$ の 1 次函数となることを証明せよ．(これは**歪みの理論**に現われる.)

**7.** $a_{ij}$ 達を $x^1, \cdots, x^n$ の $n^2$ 個の函数とする．このとき積分可能条件

$$\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}-\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x^j \partial x^l}=\frac{\partial^2 a_{lj}}{\partial x^k \partial x^i}-\frac{\partial^2 a_{lk}}{\partial x^j \partial x^i}$$

が，函数 $u_1, \cdots, u_n$ が存在して

$$a_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j}+\frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right)$$

を満たすための必要十分条件であることを証明せよ．$n=3$ および $n=2$ の場合を調べよ．(Saint-Venant による．Love [18], 49 頁参照.)

**8.** v を $E^3$ 中のベクトル場とする．函数 $\phi$ とベクトル場 w が存在して，div (w) = 0，かつ

$$\mathrm{v}=\mathrm{grad}(\phi)+\mathrm{curl}(\mathrm{w})$$

となることを示せ.

(ヒント：調和微分形式のメカニズムを用いよ．$g$ を $E^3$ 中の任意の函数とするとき，方程式 $\mathrm{Lap}(f)=g$ に解があることを仮定せよ．Abraham-Becker [1], 37-38 頁 および Love [18], 47 頁参照.)

**9.** 次の変換を考える.

$$\bar{q}^i=\bar{q}^i(q^1, \cdots, q^n),$$
$$\bar{p}_i=\sum p_j \frac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^i}.$$

このとき，10.1 節で導いた関係式

$$\frac{\partial \bar{p}_i}{\partial q^k}+\frac{\partial p_k}{\partial \bar{q}^i}=0$$

の別証明を与えよ——というのが問題である．それには

$$\lambda_j = dp_j - \sum \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^j} d\bar{p}_i$$

とおいて次を証明せよ：

(i) $\sum \lambda_j \wedge dq^j = 0$,

(ii) $\lambda_j = \sum g_{jk} dq^k$　　（適当な函数 $g_{jk}$ を用いて）.

これから $g_{jk} = g_{kj}$ を出して見よ．そしてこれが求める関係に同値なことを示せ．

# 参考文献

完全性についても歴史的正確性についても配慮はしてない．一般に，あまり近づき易くない材料に関する文献は避けるようにした．

われわれの主題への最も初等的入門は [5] に見出される．もっと進んだ入門は [7], [12], [13], [19] にある．代数的な面は [4] で完全に扱われている．[2], [20]，および [30] (或る程度まで) は，トポロジーについて必要なことをすべて供給してくれる．物理学に関するわれわれの材料の主要源泉は，[1], [8], [14], [17], [18], [21], [22] である．外微分形式論のそれ以上の物理科学への応用は [25], [27], [28], [29], [31] に見出される．微分方程式に関する材料の重要源泉は [6] である．

Lie 群に関する進んだ材料は [10], [11], [16] に含まれている．微分幾何学については，[3], [7], [8], [9], [10], [12], [16], [23], [24], [26] にある．

## I. 単行本


1. Abraham, M., and Becker, R., *Classical theory of electricity and magnetism*, 2nd ed., Glasgow (1950).
2. Alexandroff, P., und Hopf, H., *Topologie*, Berlin (1935), 特に pp. 465–467 および 497–498.
3. Blaschke, W., *Einführung in die Differentialgeometrie*, Berlin (1950).
4. Bourbaki, N., *Algèbre*, Chapitre III, Algèbre multinéaire, Act. Sci. et Ind. 1044, Paris (1948).
5. Buck, R. C., *Advanced calculus*, New York (1956), 特に pp. 309–321.
6. Carathéodory, C., *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*, Leipzig (1935), reprinted Ann Arbor (1945).
7. Cartan, É., *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Paris (1946).
8. Cartan, É., *Leçons sur les invariants integraux*, Paris (1921), reprinted (1958).
9. Cartan, É., *Systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Act. Sci. et Ind. 994, Paris (1945).
10. Cartan, É., *Théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile*, Paris (1951).
11. Chevalley, C., *Theory of Lie groups*, I, Princeton (1946).
12. De Rham, G., *Variétés différentiables, formes, courants, formes harmoniques*, Paris (1955).

13. Goldberg, S. I., *Curvature and homology*, New York (1962).
14. Golomb, M., *Theoretical mechanics*, Purdue lecture notes, Lafayette (1960), 特に pp. 105–115.
15. Goursat, É., *Course in mathematical analysis*, Vol. I, Boston (1904).
16. Hodge, W. V. D., *Theory and applications of harmonic integrals*, Cambridge (1952).
17. Lamb, Horace, *Hydrodynamics*, 6th ed., Cambridge (1932), reprinted New York (1945).
18. Love, A. E. H., *Treatise on the mathematical theory of elasticity*, 4th ed., Cambridge (1927), reprinted New York (1944).
19. Nickerson, H. K., Spencer, D. C., and Steenrod, N. E., *Advanced calculus*, Preliminary edition, Princeton (1959) (原田・佐藤訳, 現代ベクトル解析, 岩波書店 (1965)).
20. Seifert, H., und Threlfall, W., *Lehrbuch der Topologie*, Leipzig (1934), reprinted New York (1947).
21. Sommerfeld, A. J. W., *Electrodynamics, Lectures on theoretical physics*, Vol. 3, New York (1952).
22. Whittaker, E. T., *Treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, 4th ed., Cambridge (1937), reprinted New York (1944).
23. Willmore, T. J., *Introduction to differential geometry*, Oxford (1959), 特に pp. 189–192 および 202–205.

## II. 論　文

24. Chern, S. S., *Some new viewpoints in differential geometry in the large*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), pp. 1–30.
25. Debever, R., *Espaces de l'electromagnétisme*, Colloque de géométrie différentielle, Louvain (1951), pp. 217–233.
26. Flanders, H., *Development of an extended exterior differential calculus*, Trans. Amer. Math. Soc. **75** (1953), pp. 311–326.
27. Gallissot, F., *Application des formes extérieures du 2e ordre à la dynamique Newtonienne et relativiste*, Annals de l'Institut Fourier **3** (1951), pp. 277–285.
28. Gallissot, F., *Formes extérieures en mécanique*, ibid. **4** (1952), pp. 145–297.
29. Gallissot, F., *Formes extérieures et la mécanique des milleux continus*, ibid. **8** (1958), pp. 291–335.
30. Hadamard, J., *Sur quelques applications de l'indice de Kronecker*, (Tannery, J., *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, II, 2nd ed.), Paris

(1910).

31. Misner, C. W., and Wheeler, J. A., *Geometrodynamics*, Ann. of Physics **2** (1957), pp. 525–603. 近く Academic Press から若干の関連した論文を加えて出版される.

# 記号小辞典

これは特殊用語，定義，記号の表であって，特に始めの数章からとってある．

## A. 空　間

$\mathsf{E}^n$　　$n$ 次元 Euclid 空間

R　　実数の集合．また Euclid 直線 $\mathsf{E}^1$ とも考える

U, V, …　　開集合（$\mathsf{E}^n$ 中の，或いは多様体中の）

L, M, …　　ベクトル空間

$\bigwedge^p \mathsf{L}$　　L 上の $p$–ベクトルのなす空間

M, N, …　　多様体

$\mathsf{F}^p(\mathsf{U})$　　U 上の $p$–形式全体のなす集合

**直積**(Cartesian product)　S と T とを任意の集合(物の集まり)とするとき，その直積

$$\mathsf{S} \times \mathsf{T}$$

とは，順序を考えにいれた対 $(s, t)$（ただし $s$ は S に属し，$t$ は T に属する）の全体のなす集合のことである．

$\times^2 \mathsf{S}$　　これは S と自分自身との直積 $\mathsf{S} \times \mathsf{S}$ である．同様に

$$\times^3 \mathsf{S} = \mathsf{S} \times \mathsf{S} \times \mathsf{S} \quad 等々.$$

$\mathsf{S} \cap \mathsf{T}$　　これは集合 S と T との**交わり**(intersection)である．例えば $\mathsf{S}=\{1, 2, 5, 7\}$, $\mathsf{T}=\{2, 3, 7, 9\}$ ならば，$\mathsf{S} \cap \mathsf{T}=\{2, 7\}$．

I　　単位区間 $0 \leqq t \leqq 1$

## B. 函　数

**写　像**　**写像**(mapping)とは一つの空間 M から他の空間 N への滑らかな函数 $\phi$ のことである．これを次のように書く：

$$\phi\colon \mathsf{M} \to \mathsf{N}$$

**合成写像**　$\phi\colon \mathsf{M}\to\mathsf{N}$, $\psi\colon \mathsf{N}\to\mathsf{P}$ ならば，**合成写像**(composite mapping) $\psi\circ\phi\colon \mathsf{M}\to\mathsf{P}$ が作れる．それは次式で定義される．

$$(\psi\circ\phi)(x) = \psi[\phi(x)], \qquad (x \text{ は M の元})$$

(4 頁以下および 29 頁以下を見よ)．

**線型汎函数**(1 次形式)　線型空間 L から実数のなす 1 次元空間 R への 1 次変換(線

型写像)をいう.

**ヤコビアン**(函数行列式) $u^i=u^i(x^1, \cdots, x^n)\ (i=1, \cdots, n)$ ならば，この写像のヤコビアンとは次の行列式をいう.

$$\left|\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\right|.$$

$\phi^*$ 空間の間の写像 $\phi$ によってひきおこされた微分形式間の写像. 29頁以下参照.

$\phi_*$ 空間の間の写像 $\phi$ によってひきおこされた鎖の間の写像. 87頁以下参照.

## C. 特殊記号

${}^tA$ 行列 $A$ の転置行列. すなわち $A$ から行と列とをとりかえて得られる行列.

$|A|$ 1次変換(または行列) $A$ の行列式. 10頁以下参照.

dim L 線型空間 L の次元

$\sigma^H$ ここで $H=\{h_1, \cdots, h_p\}$ は添字を増加順に並べた集合である: $1\leqq h_1<h_2<\cdots<h_p\leqq n$. そして $\sigma^H=\sigma^{h_1}\wedge\sigma^{h_2}\wedge\cdots\wedge\sigma^{h_p}$.

$H'$ これは添字の補集合である. 例えば $n=8$ で $H=\{2,3,5,6\}$ なら，$H'=\{1,4,7,8\}$.

sgn $\pi$ $\pi$ が $\{1, 2, \cdots, n\}$ の置換であるとき，$\pi$ が互換(二つの数の交換)偶数回で達せられるならば $\operatorname{sgn}\pi=1$，奇数回で達せられるならば $\operatorname{sgn}\pi=-1$.

$*$ 星印作用素，20頁参照

$(\alpha, \beta)$ 内積，16頁以下参照

$\partial$ 境界作用素，71頁参照

$dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n$ 記号 $\wedge$ は**除外すること**を示す. だからこの式の意味は

$$dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{i-1}\wedge dx^{i+1}\wedge\cdots\wedge dx^n$$

となる.

# 訳者あとがき

本書は数学者や数学科の学生のために書かれた書物ではない．物理学や工学関係の研究者・学生のために書かれた本である．その目標とする所は，いわゆる“微分形式論”の，基礎事項と応用にわたっての，“わかりやすく，そして厚過ぎない”解説である．

微分形式論は，微分積分学の近代的な分野の一つであって，数十年前に É. Cartan によって発見された．これは極めて便利かつ強力な“武器”であるのみならず，自然さと美しい性質に満ちている．しかし，微分積分学のようにポピュラーに使いこなされているとはいい難いようである(数学者の世界においてすら)．

もちろん，微分形式なるものは，交代(=歪対称)テンソル場のことに他ならぬから，微分形式論は形式的にはテンソル解析に含まれる．しかし茫漠たるテンソル解析の曠野の中で，微分形式論は美しい一つの都市をかたちづくっている．本書に紹介されているように，多くの基本的なあるいは有用な事実が，微分形式の言葉で，簡潔に，巧妙に，そして美しく語られるのである．それゆえ，すでにテンソル解析に通じている者にとっても，この理論は興味をひくものである．(念の為にいえば，微分形式の手法ではうまく行かぬような対象も，もちろん多数存在する．微分幾何学的諸概念の中にはテンソル解析の手法のみが有効であるようなものが存在している．微分形式の手法は決して万能ではない．しかし可成り多くの基本的事項を美事にカヴァーしているのである.)

さて，この微分形式論が，その応用面での有用性にも拘らず，ポピュラー化していないのは何故であろうか？　入門者にとって何が難点であろうか？　それは，その数学的構造が，あまり初等的なものではないから——といえよう．

まず外積代数(exterior algebra)の概念を習得することが，どうしても必要である．さらにまた，微分可能多様体(differentiable manifold)の概念も(絶対ではないとしても)，理解されていることが望ましい．そのような，初心者にとってはいかめしい大道具の次に，漸く微分形式が導入され，その主要性質，応用が論じられる——というのが，現行の制度の下で，大学の数学科の4年生に対してなされる講義内容である．

著者 H. Flanders は，この困難に挑んでいる．すなわち，サイエンス・フィクション的なあるいはお話的なやり方でなく，上述のオーソドックスな途を辿りつつ，厳密性・精確性を(殆んど)保守しつつ，しかも抽象数学的手法が，数学の非専攻者に与える超越的な難解さ(それは数学者にとってはかえって明快さとして受取られることも多いのだが)を，なるべく小さくすることを試みている．それによって，物理・工学方面の研究者にも読みこなせ，そして使いこなせるような微分形式の解説書を書く——というのが本書の主眼であることは，著者 Flanders 自身がまえがきの中で強調している．本書は彼の実験——すなわち，パーデュー大学の工学部での講義——から生れたものである．

このような事情のために，そしてまた多過ぎる頁数を避けたいという事情もあって，数学者の立場から本書のアラサガシないし揚足とりをすることは容易であるが(例えば，第II章で外積代数の導入が生成元と基本関係の手法でなされているが，それが直観的に過ぎはしないかという疑問——ここには訳註をつけて若干カヴァーした心算ではあるが，Bourbaki 的な完璧な導入の仕方に比べると，あまりに簡潔過ぎて正体を見失いはしないかとも思う．しかしこれは数学者特有の取越苦労かも知れない．また第IX章の Lie 群論が局所理論(local theory)と大局的(全域的)理論(global theory)の混合物ではあるが，化合物の感じには未だしの感がある．また，第X章の物理学への応用の所では，cotangent bundle の性質を生かしてもっと intrinsic な取扱いも可能であろうと思うが，ここでの書き方は局所座標系に固執し過ぎる気がする.)——などなどと，

いろいろ揚足とりないし感想(数学者側からの)を述べては見ても，著者および一般読者にはまあどうでもよいことであろう．問題は，数学の専門家ではない隣接科学分野の人々に対し，著者のなした解説の試みが，真に効果的であったかどうか——という点にある．しかしそれはもう何年かしないと結論は出ないであろう．この種の結論は一人や二人の評者によって早急になされるものではなくて，読者大衆が時間をかけて出して行くものであるから．

訳者自身の個人的感想としては，少ない頁数の中で，基本的な古典的話題のみならず，かなりモダーンな話題までこめて，次々に料理して行く H. Flanders の手腕は美事なものと思う．例えば，Hopf の不変量，まつわり数とその Gauss-積分表示(いわゆる Ampère の法則の数学的対応物！)などまでうまく紹介してある．しかしこれらの厳密な数学的証明までは与えてない．しかし応用する者にとっては十分わかり易く，しかも使える形の説明である．Frobenius の積分定理のような基本事項になると，説明は心理的にもわかるように配慮され，証明も詳しい．特にこの Frobenius の積分定理とその種々の変形の部分は，Flanders 自身の研究にもとづいて書かれてあって，普通の教科書にあるような昔からの流儀でない新鮮さに満ちている．

本訳書の成立について一言すれば次の通りの次第である：物理の I 教授が原書を一読されて，物理・工学の学生のために訳書があれば便利であろうと，岩波書店の M 氏に suggest された由である．M 氏がそこで訳者を探し始められたが，皆々多忙その他の理由でなかなからちがあかない——と，何かの折に M 氏との立話中に，そんな話になって行った．そこで筆者は軽率にも，それ位の頁数で，しかも英語なのだから，飜訳は大して時間をとる仕事でもないでしょう——と口走ってしまったのが運の尽きであった．かくて，暫らくの間 Flanders の本とニラメッコせざるを得ない破目になったわけである．K 教授のように，英語の本は誰にも読めるから，訳す手間をかけることもあるまい——という意見の方々も多いが，そして筆者もそれに同感だが，原書入手が日本の学

生にとって未だに容易でない現状から，まあ訳す意味も多少はあろうと思ったのである．原書の香気，或いは個性をうまく再現し得たとは毛頭考えられないが，読者諸賢の御叱正によって，本訳書を改善して行きたいと願っている．

1967年5月11日　ボストンにて

訳　　者

# 索　　引

## あ 行



## か 行

## さ 行

### た 行

## な 行



## は 行

## ま 行

## や 行



## ら 行

微分形式の理論 およびその物理科学への応用

1967年 6 月 30日 第1刷発行 ©

¥ 1000

訳 者 岩堀長慶（いわほり ながよし）

発行者 岩波雄二郎

東京都千代田区神田一ツ橋 2ノ3

発行所 株式会社 岩波書店

落丁・乱丁本はお取替いたします 精興社印刷・牧製本